О некоторых свойствах трансцендентных чисел первого класса.

Д. Д. Мордухай-Болтовской (Ростов на Дону).

§ 1. Признак трансцендентности Льювилля.

Алгебраическое число определяется как корень уравнения:

$$a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m = 0\,, \tag{1}$$

где a_i целые рациональные числа.

Число не алгебраическое, т. е. не определяемое уравнением (1) называется *трансцендентным.*

То, что *существуют* числа трансцендентные, это доказывается тем, что множество алгебраических чисел *счетное*, в то время, как множество всех иррациональных чисел — мощности континуума.

Но существование трансцендентных чисел было обосновано еще до создания теории множеств на основании *достаточного* условия трансцендентности, указанного Льювиллем [1]).

Это условие определяет низшую границу для абсолютной величины отклонения числа от рациональной дроби, приближенно его выражающей.

Если алгебраическое число x определяется неприводимым уравнением n-ой степени, а $\frac{p}{q}$ рациональная дробь, то для всех значений q, превосходящих некоторую границу:

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{A}{q^n}\,, \tag{2}$$

где $A > 0$ не зависит от q.

Это условие *необходимое, но недостаточное алгебраичности* числа; как следствие отсюда вытекает условие *не необходимое, но достаточное трансцендентности.*

Прежде всего, фиксируя n, можем сказать:

Если для достаточно больших q

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}}\,, \tag{3}$$

то x не определяется никаким неприводимым уравнением n-ой или ниже степени.

---

[1]) Journal de Liouville. T. XVI. E. Borel. Leçons sur la théorie des fonctions. Paris. 1914.

Если неравенство

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n} \qquad (3)'$$

имеет место для всякого n при достаточно больших q, то x наверно число трансцендентное.

На основании этого признака во многих случаях мы имеем возможность доказывать трансцендентность построенных с помощью разложений чисел.

Так, можно видеть, что ряд

$$1 + \frac{1}{[\varphi(1)]^{\vartheta(1)}} + \frac{1}{[\varphi(2)]^{\vartheta(2)}} + \cdots + \frac{1}{[\varphi(n)^{\vartheta(n)}} + \cdots \qquad (4)$$

при $\vartheta(n)$ таком, что $\vartheta(n) > n$ [1]) и целое

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n=\infty} \dfrac{\vartheta(n)}{\vartheta(n+1)} = 0 \\ \varphi(n) \text{ таком, что } \varphi(n) > 0 \text{ и целое} \\ \varphi(n+1) \geqslant (n)(n+1) \end{array}\right\} \quad (*)$$

выражает число *трансцендентное.*

В самом деле, при выставленных условиях (*)

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{[\varphi(n+1)]^{\vartheta(n+1)}} \left[1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \right] =$$
$$= \frac{1}{[\varphi(n+1)]^{\vartheta(n+1)}} \; \frac{n+2}{n+1},$$

если положить

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{[\varphi(1)]^{\vartheta(1)}} + \cdots + \frac{1}{[\varphi(n)]^{\vartheta(n)}},$$

$$q = [\varphi(n)]^{\vartheta(n)}.$$

Положение будет доказано, если докажем, что

$$\omega = \lim_{n=\infty} \frac{1}{[\varphi(n+1)]^{\vartheta(n+1)}} \; \frac{n+2}{n+1} : \frac{1}{[\varphi(n)]^{k\vartheta(n)}} = 0$$

при всяком положительном постоянном k.

Но

$$\omega = \lim_{n=\infty} \left[\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \right]^{k\vartheta(n)} \frac{1}{[\varphi(n+1)]^{\vartheta(n+1) - k\vartheta(n)}},$$

$$\lim \left[\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)} \right]^{k\vartheta(n)} \leqslant \lim \left[\frac{1}{n+1} \right]^{k\vartheta(n)} = 0,$$

$$\lim \frac{1}{\left[\varphi(n+1) \right]^{\vartheta(n+1)\left[1 - \frac{k\vartheta(n)}{\vartheta(n+1)}\right]}} = 0.$$

В частном случае можно положить

$$\varphi(n) = n!, \quad \vartheta(n) = n! \text{ или } \vartheta(n) = n^n \text{ и т. д.}$$

---

1) В настоящем случае достаточно положить $\vartheta(n) > 0$. Но наше разложение нам еще больше понадобится, когда $\vartheta(n) > n$.

§ 2. Неравенство Льювилля.

Для дальнейшего будет иметь значение не только неравенство (2), но и вывод его.

Льювилль исходит из формулы Лагранжа:

$$f(a) - f(x_0) = (a - x_0) f'(\xi), \tag{5}$$

где

$$x_0 \leqslant \xi \leqslant a, \quad a = \frac{p}{q},$$
$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \quad (n > 1).$$

Отсюда при $f(x_0) = 0$:

$$f(a) = (a - x_0) f'(\xi), \tag{5'}$$

$$|a - x_0| = \left|\frac{p}{q} - x_0\right| = \frac{\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{|f'(\xi)|}, \tag{6}$$

где $|\ |$ означает абсолютное значение.

Производную $f'(\xi)$ в случае неприводимости уравнения $f(x) = 0$, а потому и отсутствия у него кратных корней можем предполагать при достаточно малом промежутке (a, x_0), иначе говоря, при достаточно большом q, *не равной нулю.*

В самом деле, если x_0 не кратный корень, то в *достаточно малом* промежутке около x_0 совсем не будет нулей функции $f'(x)$.

Мы можем положить:

$$|f'(x)| \leqslant M \quad (M > 0)$$

при

$$x_0 \lesseqgtr x \lesseqgtr a.$$

Далее

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \frac{C}{q^n},$$

где C целое положительное число, которое не может быть нулем в силу неприводимости уравнения $f(x) = 0$.

Отсюда

$$|a - x_0| \geqslant \frac{C}{Mq^n} \geqslant \frac{A}{q^n},$$

где A *не зависит от* q, ибо, во первых, $C \geqslant 1$; во вторых, за M можно всегда принять такое число, что

$$|f'(x)| < M$$

в промежутке (x_0, x_1), объемлющем (x_0, a).

Неравенство Льювилля:

$$|a - x_0| \geqslant \frac{f(a)}{M} \tag{7}$$

может иметь и более *широкое* применение.

Если $f(x)$ трансцендентная функция, голоморфная вблизи x_0, причем x_0 ее *простой* нуль, то из неравенства

$$|f(a)| > \omega$$

оно дает возможность сделать заключение

$$|a - x_0| > \frac{\omega}{M}.$$

§ 3. Некоторые обобщения неравенства Льювилля.

Если относительно $f(x)$ известно только то, что она функция *голоморфная* в некоторой области, то мы можем считать ее нули только *конечного порядка.*

Если вещественная точка x_0 есть p-кратный нуль функции $f(x)$, то вместо $(5)'$ имеем

$$f(a) = \frac{(a - x_0)^p}{p!} f^{(p)}(\xi),$$

а вместо (7)

$$|a - x_0| > \frac{\sqrt[p]{|f(a)|}}{M_p}; \tag{7$_p$}$$

$$M_p = \max \left| \frac{f^{(p)}(x)}{p!} \right|^{\frac{1}{p}},$$

$$(a \gtrless x \gtrless x_0),$$

которое находит совершенно такое же применение, что неравенство (7).

Отмечаем еще *обращенное* неравенство Льювилля.

Из (6) выводим также, что

$$|a - x_0| \leqslant \frac{|\overline{f}|}{|m|}, \tag{8}$$

где

$$\left.\begin{aligned} |\overline{f}| &= \max |f(x)| \\ m &= \min |f'(x)| \end{aligned}\right\} \quad (a \lessgtr x \lessgtr x_0);$$

в случае же кратных корней имеем аналогичным образом

$$|a - x_0| < \frac{\sqrt[p]{\overline{f}^{(p)}}}{|m_p|}. \tag{8$_p$}$$

Укажем еще дальнейшее расширение области применения выведенных неравенств.

Мы можем иметь $f(x_0) = 0$ и в случае x_0 *особой точки* $f(x)$. Если это особая точка алгебраического типа (*критическая*), каковой может быть только точка *разветвления*, то, полагая

$$(x - x_0)^{\frac{1}{\nu}} = z,$$

приводим $f(x)$ к голоморфной функции $\varphi(z)$, а неравенство $(7)_p$, в настоящем случае

$$|b| > \frac{\sqrt[p]{|\varphi(b)|}}{M_p}$$

к неравенству

$$|a-x_0|>\frac{\sqrt[p]{|f(a)|^{\nu}}}{M_p^{\nu}}. \qquad (7)_p^{\nu}$$

Заметим еще, что неравенство Л ь ю в и л л я (7) и его обобщения $(7)_p$ и $(7)_p^{\nu}$ *остаются в силе и в случае комплексных a, x.*

Интегрированием по частям легко убеждаемся, что в случае *голоморфности* функции внутри некоторой области Ω, содержащей (a, x) и при условии, что

$$f(x_0)=0,\ f'(x_0)=0\ldots\ f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0,$$

$$f(a)=\frac{1}{n!}\int\limits_a^{x_0} f^{(n)}(u)(a-u)^{n-1}du,$$

где интеграл взят по *прямой* ax_0.

Далее замечаем, что

$$\left|\int\limits_a^{x_0} f^{(n)}(u)\,(a-u)^{n-1}du\right|<\int\limits_0^{s}|f^{(n)}(u)|\ |a-u|^{n-1}\,d\,|a-u|=$$

$$=\int\limits_0^{s}|f^{(n)}(u)|\,s^{n-1}ds.$$

Но

$$\int\limits_0^{s}|f^{(n)}(u)|\,s^{n-1}ds\leqslant\frac{s^n}{n}\overline{f^{(n)}},$$

где $\overline{f^{(n)}}$ наибольшее значение

$$|f^{(n)}(x)| \text{ в } \Omega.$$

Таким образом:

$$\frac{s^n}{n!}\overline{f^{(n)}}>|f(a)|,$$

откуда и вытекает неравенство $(7)_p$.

§ 4. Ряды алгебраических чисел, приближенно определяющие трансцендентные.

Как продолжение Л ь ю в и л л е в с к о й работы следует выставить изыскание признаков трансцендентности, когда число задается, как предел *сходящегося* ряда:

$$y^{(1)},\ y^{(2)},\ y^{(3)}\ldots\ldots\ y^{(n)}\ldots\ldots, \qquad (9)$$

члены которого не *рациональные* дроби, а вообще *алгебраические* числа, определяемые каким-либо образом.

$y^{(j)}$ определяется алгебраическим уравнением

$$b_0^{(j)}y_j^{n_j}+b_1^{(j)}y_j^{n_j-1}+\cdots+b_{n_j-1}^{(j)}y_j+b_{n_j}^{(j)}=0. \qquad (10)_j$$

Система коэффициентов целых или вообще рациональных

$$b_0^{(j)}\, b_1^{(j)} \ldots b_{n_j}^{(j)}$$

меняется с изменением j, а равно и их число, иначе,— степень уравнения n_j.

Следует различать случаи:

1) когда n_j остается неизменным, все уравнения одной и той же степени.

Особенного внимания заслуживает случай *правильного* возрастания коэффициентов (для которого мы и дадим результаты), когда

$$\left|\frac{b_{kj}^{(j)}}{b_0^{(j)}}\right| < E$$

и E — определенное число, не зависящее от j.

2) n_j возрастает вместе с j. Это будет, если от уравнения к уравнению переходить *присоединением новых членов* так, что последовательные приближения x определяются уравнениями

$$\begin{aligned} &b_0 + b_1 x = 0 \\ &b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n = 0; \end{aligned}$$

иначе говоря, x представляется корнем уравнения

$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots = 0.$$

Так, число π определяется, как корень уравнения

$$x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \cdots = 0.$$

Предполагая $b_k^{(j)}$ сокращенными на их общий делитель, мы будем называть

$$\sum_{i=0}^{i=n_j} \left| b_i^{(j)} \right| = (b^{(j)})$$

высотой уравнения $(10)_j$.

В случае правильного возрастания

$$(b^{(j)}) < E b_0^{(j)}.$$

§ 5. Собственно трансцендентные числа и гипертрансцендентные.

Мы укажем еще одно направление для обобщения исследований Льювилля.

Совершенно таким же образом, как из множества иррациональных чисел выделяется счетное множество чисел алгебраических, так из множества чисел трансцендентных выделяется счетное множество *собственно трансцендентных* чисел, которые обладают не только одним отрицательным определением, противополагающим их числам алгебраическим, но еще характеризуются некоторыми *операциями*, с помощью которых они получаются.

Замечая, что число e можно определить, как

$$y_{x=1},$$

если

$$y' = y,$$

причем

$$y_{x=0} = 1;$$

число $\frac{\pi}{4}$, как $y_{x=1}$, если

$$(1+x^2)y' = 1,$$

причем

$$y_{x=0} = 0,$$

$lg\ \alpha$, где α рациональное число, как $y_{x=\alpha}$, если

$$xy' = 1,$$

причем

$$y_{x=1} = 0, \text{ и т. д.,} —$$

мы видим, что все исследованные трансцендентные числа подходят под форму

$$N = y_{x=c},$$

где c рационально, а y определяется условием

$$f(x,\ y,\ y' \ldots y^{(n)}) = 0: \tag{11}$$

f полином с рациональными или, что все равно, с целыми коэффициентами от $(x,\ y,\ y' \ldots y^{(n)})$,

$$y_a = b,\ y'_a = b_1 \ldots y_a^{(n-1)} = b_{n-1}, \tag{12}$$

a, b_j рациональные числа.

Вот такого рода трансцендентные числа будем называть *собственно-трансцендентными*, противополагая им *гипертрансцендентные*.

Что множество собственно трансцендентных чисел — счетное, это следует из того, что для данного n в уравнении

$$\varphi_0(x,y)y'^n + \varphi_1(x,y)y'^{n-1} + \cdots = 0$$

коэффициенты $\varphi_j(x, y)$ дают счетное множество [1]), а равным образом и b_j.

Придавая же n последовательные значения, получаем счетное множество счетных множеств.

Так как теперь коэффициенты в $\varphi_j(x, y, y')$ в уравнении

$$\varphi_0(x,y,y')y''^n + \varphi_1(x,y,y')y''^{n-1} + \cdots = 0$$

---

[1]) G. Cantor. Crelles Journal. Bd. 77 (1873).

E. Borel. Leçons sur la théorie des fonctions.

Klein. Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie. 1895.

образуют счетное множество, то, рассуждая таким же образом, получаем счетное множество собственно трансцендентных чисел, определяемых уравнением второго порядка и т. д.

Но можно указать еще другую точку зрения, на основании которой числа классифицируются на собственно трансцендентные, представляющие решение уравнения $y = 0$, где y определяется условиями (11) и (12), и гипертрансцендентные.

Основная проблема теории гипертрансцендентных чисел — *разыскание признаков гипертрансцендентности в первом и втором смысле.*

Проблемы, связующие теорию трансцендентных чисел с аналитической теорией дифференциальных уравнений, должны исследовать условия определяемости собственно трансцендентного числа дифференциальным уравнением данного порядка или с данными особенностями интеграла.

§ 6. Классы построений, выражающих собственно трансцендентные числа.

Среди собственно трансцендентных чисел особого внимания заслуживают те, которые *строятся* с помощью символов алгебраических и элементарных трансцендентных операций над целыми (или, все равно, рациональными) числами. Исследование их свяжет теорию трансцендентных чисел не с новым *функциональным*, а со старым *конструктивным анализом.*

Эти трансцендентные числа можно классифицировать, пользуясь принципом Льювиллевской классификации[1]) *трансцендентных функций.*

Мы называем

$$e^{\theta},\ \lg\Theta,\ \sin\Theta,\ \cos\Theta,\ \arcsin\Theta,\ \arccos\Theta,\ \operatorname{arctg}\Theta,$$

где Θ — алгебр. число, — *элементарными основными построениями первого класса.*

Число, определяемое таким построением (кроме исключительных значений для e^{θ} $(\Theta = 0)$, $\lg\Theta\,(\Theta = 1)$, $\arcsin\Theta\,(\Theta = 0)$, $\arccos\Theta\,(\Theta = 1)$, $\operatorname{arctg}\Theta\,(\Theta = 0)$), как известно, трансцендентное, мы будем называть основным *трансцендентным числом первого класса.*

Алгебраическая функция основных построений первого класса дает трансцендентное (уже не основное) построение первого класса. Число, выражаемое трансцендентным построением первого класса, но не выражаемое алгебраически представляет *трансцендентное (не основное) число первого класса.*

Конечно, отнесение числа к трансцендентным первого класса должно быть обосновано; что $\sqrt{3 + 5e^3}$ — *построение* первого класса, это вытекает из самого определения, но что $\sqrt{3 + 5e^3}$ — трансцендентное *число* первого класса, это выводится из трансцендентности e.

$\lg 2 - \sqrt{2 - \sqrt{e}}$ — построение первого класса. Мы докажем, что оно — число первого класса, если установим невозможность алгебраической зависимости между $\lg 2$ и e.

e^{θ_1}, $\lg\Theta_1 \ldots$, где Θ_1 — трансцендентное построение первого класса — основные трансцендентные построения второго класса. Алгебраическая функция их, а также

---

1) Liouville. Mémoire sur la classification des transcendantes, Journal de Liouville, t. II, 1837, p. 53; также мои работы по интегрированию в конечном виде, напр. „Об интегрировании трансцендентных функций“. Известия Варшавского Университета за 1913 год.

основных построений первого класса дает построение (не основное) второго класса.

Таково, например,

$$\sqrt[3]{8e^e + 3\lg(1+\lg 2) - 2e^3}.$$

Число, выражаемое построением второго класса, но не выражаемое построением первого класса или алгебраически, представляет трансцендентное число *второго класса.*

Таким точно образом устанавливается понятие о трансцендентных построениях, а также и числах *высших классов.*

$$X = \lg(e^{3e}\sqrt{5})$$

— построение третьего класса, но число это первого класса, так как

$$X = 3e + \frac{1}{2}\lg 5.$$

Следует отметить, что трансцендентное построение q класса от одной или нескольких букв, по замене последних рациональными числами, дает *числовое* построение q класса, а потому трансцендентное число q-го и нисшего класса. Обратно всякое числовое построение можно представить, как результат замены в буквенном букв рациональными числами.

В настоящей статье мы будем говорить главным образом о *построениях первого класса.*

Мы будем рассматривать еще трансцендентные *неявно определенные.*

Можно определить числа *трансцендентным* уравнением

$$\Omega(x) = 0,$$

где Ω — построение с помощью элементарных трансцендентных.

Мы будем говорить, что x тогда определяется неявным построением 1, 2 и т. д. классов, смотря по тому, к какому классу следует отнести $\Omega(x)$.

Так, уравнения

$$\lg(x^2+y) - 3x = 0,$$
$$\sqrt{2}\lg(xy+2y^3) - \lg(\sqrt{x^2+y}+y) = x^3$$

должны быть отнесены к *первому*, а

$$\lg(xe^y - y) = e^{x-3y}$$

— ко *второму.*

§ 7. Алгебраическое число, приближенно выражаемое рядом уравнений.

Неравенство (2) можно переписать в виде

$$q \geqslant \sqrt[n]{A}\varepsilon^{-\frac{1}{n}},$$

где ε — абсолютное значение разности $\frac{p}{q} - x$ или

$$|p| + |q| > B\varepsilon^{-\frac{1}{n}}, \tag{13}$$

где $\sqrt[n]{A} > B$ и B не зависит от n.

Дробь $\frac{p}{q}$ можно рассматривать, как корень уравнения 1-й степени

$$qy - p = 0, \tag{14}$$

и неравенство (13) будет тогда давать *низшую границу для высоты уравнения (14)* при условии, что y представляет x с точностью ε.

Теорема Льювилля при такой формулировке допускает следующее обобщение.

Пусть $x = x_1$ — корень уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0. \tag{15}$$

Пусть, далее, y_1 — корень уравнения

$$b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \ldots + b_{m-1} y + b_m = 0 \tag{16}$$

представляет приближение x, так что

$$| y_1 - x_1 | < \varepsilon;$$

тогда высота уравнения (16) удовлетворяет условию

$$| b_0 | + | b_1 | + \ldots + | b_m | > B\varepsilon^{-\mu},$$

где μ, как мы ниже покажем, равно $\frac{1}{n}$, а B не зависит от b_j.

Мы дадим подробное доказательство этому свойству, отмеченному Борелем [1]).

При этом заметим здесь, что выводимое в настоящем § неравенство имеет место не только для *вещественных*, но и *мнимых* y, x, так что $| \ |$ ныне означает *модули* (см. § 3, конец).

Коэффициенты b_j мы предполагаем целыми и сокращенными.

Взяв произведение

$$\begin{aligned} P = & (y_1 - x_1)(y_1 - x_2)(y_1 - x_3) \ldots (y_1 - x_n) \\ & (y_2 - x_1)(y_2 - x_2)(y_2 - x_3) \ldots (y_2 - x_n) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (y_m - x_1)(y_m - x_2)(y_m - x_3) \ldots (y_m - x_n), \end{aligned}$$

где x_j, y_j — корни уравнений (15) и (16), мы замечаем, что *с одной стороны*, в виду того, что

$$a_0 (y_j - x_1)(y_j - x_2) \ldots (y_j - x_m) = a_0 y_j^n + a_1 y_j^{n-1} + \ldots + a_n,$$

мы можем написать

$$P = \frac{1}{a_0^m} \prod_{j=1}^{j=m} (a_0 y_j^n + \ldots + a_n) = \frac{\Theta}{a_0^m b_0^n} \cdot$$

---

[1]) Comptes Rendus, 1889. Моя статья: К теории трансцендентных чисел. Протоколы О-ва Ест. при Варшавском унив. 1913.

Здесь $b_0^n \Theta$, как целая симметрическая функция от y_j, сводится к целой функции от b_0, $b_1 \ldots b_n$, а так как мы предположили b_j целыми числами, то оно — *целое число*.

Но, с другой стороны,

$$P = (-1)^{n-1}(y_1 - x_1)\{(x_1 - y_2)(x_1 - y_3) \ldots (x_1 - y_m)\} \frac{\prod\limits_{j=2}^{j=n} (b_0 x_j^m + \ldots + b_m)}{b_0^{n-1}}.$$

Полагая $|y_1 - x_1| < \varepsilon$, выводим, что

$$\left| \frac{\prod\limits_{j=2}^{j=n} (b_0 x_j^m + \ldots + b_m)}{b_0^{n-1}} \right| > \frac{|\Theta|}{|a_0|^m |b_0|^n} \frac{\varepsilon - 1}{H},$$

если

$$|(x_1 - y_2)(x_1 - y_3) \ldots (x_1 - y_m)| < H.$$

Мы ставим теперь следующее ограничение: уравнения, определяющие y_1 (приближения x_1), таковы, что модули *всех* корней остаются меньше некоторого конечного, независящего от b_k, числа t.

Это условие равносильно условию правильного изменения $b_k^{(j)}$.

В самом деле, если ни один из корней вместе с j не возрастает, то коэффициенты уравнения

$$y^m + \frac{b_1^{(j)} y^{m-1}}{b_0^{(j)}} + \frac{b_2^{(j)} y^{m-2}}{b_0^{(j)}} + \ldots + \frac{b_m^{(j)}}{b_0^{(j)}} = 0,$$

выражаемые целыми симметрическими формулами корней, будут оставаться конечными. С другой стороны, предположив, что $\frac{b_k^{(j)}}{b_0} < E$, $(k = 2, 3 \ldots n)$, из уравнения

$$y + \frac{b_1^{(j)}}{b_0^{(j)}} + \frac{b_2^{(j)}}{b_0^{(j)} y} + \ldots + \frac{b_m^{(j)}}{b_0^{(j)} y^{m-1}} = 0$$

должны вывести, что

$$\lim_{y=\infty} \frac{b_1^{(j)}}{b_0^{(j)}} = \infty.$$

Тогда можем положить $H = \{|x_1| + |t|\}^{m-1}$, т. е. независящим от b_j.

Неравенство же (18) сейчас нам дает

$$\{|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_m|\}^{n-1} |\overline{x}|^m > \frac{|\Theta| |b_0|^{-1} \varepsilon^{-1}}{|a_0|^m H},$$

где $|x|$ — наибольший из модулей $|x_j|$, если этот наибольший модуль больше единицы, и единица — в противном случае, или, замечая, что

$$|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_m| > |b_0|,$$

$$|b_0| + |b_1| + \ldots + |b_m| > A \varepsilon^{-\frac{1}{n}}, \tag{19}$$

где

$$A = \sqrt[n]{\frac{1}{|a_0|^m H}}$$

не зависит от b_j.

Взяв первый из отмеченных в § 3 способов приближенного определения x, можем, придав неравенству (19) другую форму, высказать следующее положение:

Если число x определяется приближенно корнями ряда уравнений определенной степени m с целыми коэффициентами, правильно изменяющимися,

$$b_0^{(j)}y^m + b_1^{(j)}y^{m-1} + \ldots + b_{m-1}^{(j)}y + b_m^{(j)} = 0, \qquad (16)_j$$

в которых $b_0^{(j)}$ при достаточно большом j может быть сделано как угодно велико, то число x не определяется неприводимым уравнением n-ой и ниже степени, если при достаточно больших j

$$|y - x| < \frac{1}{(b^{(j)})^{n+1}}, \qquad (20)'$$

где $b^{(j)}$ — высота уравнения.

В самом деле, неравенство (19) дает

$$\varepsilon > \frac{G}{b^{(j)n}}, \qquad G = \frac{1}{|a_0|^m H},$$

а (20)

$$\varepsilon < \frac{1}{(b^{(j)})^{n+1}},$$

так что

$$\frac{1}{(b^{(j)})^{n+1}} > \frac{G}{(b^{(j)})^n} \quad \text{или} \quad (b^{(j)}) < G^{-1},$$

что при достаточно большом $b_0^{(j)}$ или j невозможно.

Отсюда имеем достаточный признак *трансцендентности.*

Число x трансцендентно, если для всякого n и при достаточно большом j.

$$|y - x| < \frac{1}{|b^{(j)}|^n}. \qquad (20)$$

На основании условия правильности возрастания $b_k^{(j)}$ мы можем неравенство (20) заменить следующим

$$|y - x| < \frac{1}{|b_0|^n}. \qquad (\overline{20})$$

Если $|b^{(j)}|$ — наибольший из модулей $|b_k^{(j)}|$, то условие (19) дает

$$m\,|b^{(j)}| > A\varepsilon^{-\frac{1}{n}},$$

$$\varepsilon > \frac{K}{|b|^n}, \qquad K = \frac{G}{m^n};$$

совместно же с неравенством

$$\varepsilon < \frac{1}{|b_0|^{n+1}}$$

дает

$$\left|\frac{b_0^{(j)}}{b^{(j)}}\right|^n b_0^{(j)} < K^{-1},$$

но этого быть при достаточно больших j не может, так как уже меньшая величина $\frac{1}{E^n} b_0^{(j)}$ бесконечно возрастает.

Таким образом устанавливается достаточное условие неопределяемости x неприводимым уравнением n-ой и нисшей степени, а затем и достаточное условие трансцендентности x, выражаемое неравенством $(\overline{20})$.

§ 8. Об условиях трансцендентности нуля голоморфной функции.

Если мы возьмем второй способ определения x § 3, напр. будем определять x уравнением

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m + \ldots, \tag{21}$$

где $c_j = \frac{k_j}{l_j}$, и если через d_m обозначить наименьшее кратное $l_1, l_2 \ldots l_m$, то $c_j = \frac{l_m^{(j)}}{d_m}$, и условие (19) даст

$$d_m [\,|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_m|\,] > A\varepsilon^{-\frac{1}{n}},$$

$$\varepsilon > \frac{A^n}{|\sigma|^n d_m^n} = \frac{1}{|a_0|^n |\sigma_m|^n d_m^n H},$$

$$\sigma_m = |c_0| + |c_1| + \ldots + |c_m|.$$

Если радиус сходимости (21) не меньше единицы, то

$$|\sigma_m| < E,$$

где E — число, независящее от m и

$$\varepsilon > \frac{1}{|a_0|^n E^n d_m^n H}; \tag{22}$$

следует помнить, что здесь H не зависит от d_n и c_j, так как

$$\frac{d_n c_j}{d_n c_0} = \frac{c_j}{c_0}$$

в силу сходимости (21) в круге радиуса не меньше 1 бесконечно убывает.

Но H зависит от m, причем $H = \varrho^{m-1}$, где уже ϱ не зависит от m. Заметим также, что d_m возрастает вместе с m, ибо иначе c_m не могли бы вместе с m убывать.

Но дальнейшие заключения мы можем сделать только при некотором ограничении, относящемся к возрастанию d_m, а именно — предполагая, что $\frac{m^m}{d_m}$ *бесконечно убывает с* m.

Если

$$\varepsilon < \frac{1}{d_m^{n+1}} \tag{23'}$$

при достаточно большом m, то корень уравнения (21) не может уже определиться неприводимым уравнением n-й или иной степени, так как неравенства (23) и (24) дают

$$d_m < |a_0|^n E^n \varrho^{m-1},$$

чего при достаточно большом m быть не может.

Отсюда выводится, что x — наверное число *трансцендентное, если для всякого n и при достаточно большом m*

$$\varepsilon < \frac{1}{d_m^n}, \tag{23}$$

предполагая вместе с тем, что

$$\lim_{m=\infty} \frac{m^m}{d_m} = 0.$$

Если радиус сходимости меньше 1, то подстановкой $x = z\varrho$, где за ϱ принимается рациональная дробь $\frac{1}{k}$ (k — целое число) меньше R, например, взяв $k = \mathrm{E}\left(\frac{1}{R}\right)$, приходим к случаю уже рассмотренному.

Вместо (23) имеем

$$\varepsilon < \frac{1}{\left[\mathrm{E}\left(\frac{1}{R}\right)\right]^n d_m}$$

и если заметить, что, на основании теоремы Коши-Гадамара,

$$R = \overline{\lim} \frac{1}{\sqrt[m]{c_m}},$$

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{R}\right) = \underline{\lim} \sqrt[m]{c_m}.$$

Условие это можно привести к виду

$$\varepsilon < \frac{1}{\{\underline{\lim} \sqrt[m]{c_m}\}^n d_m^n}. \tag{24}$$

Но условие это сводится к тому, что выведено для случая $R \geqslant 1$.

Если при всяком n и достаточно большом m

$$\varepsilon < \frac{1}{d_m^n},$$

то условие (24) выполнено.

В самом деле, взяв

$$\varepsilon < \frac{1}{d_m^{2n}},$$

мы должны иметь при достаточно большом m

$$\frac{1}{d_m^{2n}} < \frac{1}{\{\underline{\lim} \sqrt[m]{c_m}\}^n d_m^n},$$

так как при достаточно большом m

$$d_m > \overline{\lim} \sqrt[m]{c_m}.$$

В неравенстве (23) можно принять $m = n$.

В самом деле, для данного n можно всегда взять m столь большим, что

$$\frac{1}{d_m^m} < \frac{1}{d_m^n},$$

и неравенство

$$\varepsilon < \frac{1}{d_m^m} \qquad (24)'$$

будет влечь за собой (24).

Если теперь

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m + R_m(x),$$

то

$$f(y) = R_m(y).$$

На основании неравенства (8) § 2

$$|y - x| < \frac{|R_m|}{m},$$

где $|R_m|$ — наибольшее значение модуля остаточного члена и, совершенно таким же образом, в случае кратного корня, уравнение:

$$c_0 + c_1 y + \ldots + c_m y^m = 0,$$

$$|y - x| < \frac{\sqrt[p]{|R_m|}}{|m_p|}.$$

Неравенство (23) заменяется следующим:

$$|R_m| < \frac{|m|}{d_m^n}. \qquad (26)'$$

Но это неравенство при достаточно большом m заменяется

$$|R_m| < \frac{1}{d_m^n}. \qquad (26)$$

так как при достаточно большом n неравенство

$$|R_m| < \frac{1}{d_m^{n+1}}$$

влечет за собой (26′).

То же самое следует сказать и в случае кратного корня. Неравенство (23) заменяется:

$$|R_m| < \frac{|m_p|^p}{d_m^{np}}.$$

которое является следствием

$$|R_m| < \frac{1}{d_m^{p(n+1)}}$$

и поэтому может быть опять заменено (26).

Итак, *корень уравнения (21) наверное трансцендентный, если для всякого n и при достаточно большом m*

$$|R_m| < \frac{1}{d_m^n}, \tag{26}$$

или, если при достаточно больших m

$$|R_m| < \frac{1}{d_m^m}, \text{ причем } \lim \frac{m^m}{d_m} = 0. \tag{$\overline{26}$}$$

Этот результат тотчас связует арифметические свойства нулей голоморфных функций (или вообще алгеброидов) с характером тех операций, с помощью которых они строятся, а также с особенными точками на круге сходимости.

Мы ограничимся пока случаем $f(x)$ выражаемой *в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных,* предоставляя читателю сделать такие же выводы и для случая, когда $f(x)$ — вообще решение алгебраического дифференциального уравнения, а также для случая, когда $f(x)$ — интеграл уравнения 1-го порядка Пенлевэ и т. д.

Тогда, на основании теоремы Чебышева [1]), мной доказанной

$$\frac{p_m}{m} < E \quad (*), \quad \frac{\lambda_m(p)}{m} < E \quad (**),$$

т. е. отношение наибольшего простого делителя, входящего в d_m к m с возрастанием n остается меньше числа E, не зависящего от n, и то же относится к показателю всякого простого делителя.

Поэтому

$$d_m < p_m^{\omega_m(p_m) m E},$$

где $\omega_m(p_m)$ — число простых чисел не больше n, и потому

$$\omega_m(p_m) < \omega_m(mE) < mE,$$
$$d_m < (mE)^{m^2 E^2}.$$

Но очевидно, что при достаточно больших m

$$(mE)^{m^2 E^2} < m^{m^3}$$

и

$$d_m < m^{m^3}.$$

---

[1]) Bulletin des sciences mathématiques, T. 50, Novembre—Décembre 1926, также Sur la généralisation du théorème d'Eisenstein, indiqué par Tschebycheff, C. R. 1926, t. 182, № 4, см. Hermite, Cours d'analyse, 1882.

В самом деле,

$$\lim_{m=\infty}\{m^2(m-E^2)\lg m - m^2E^2\lg E\} =$$

$$=\lim_{m=\infty} m^2(m-E^2)\left\{\lg m - \frac{E^2}{m-E^2}\lg E\right\} = \infty.$$

Таким образом, условием достаточным, чтобы голоморфное разложение

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_mx^m + \ldots,$$

выражаемое в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных, имело трансцендентный нуль, будет следующее: при достаточно большом m

$$|R_m| < \frac{1}{m^{m^i}}.$$

§ 9. О трансцендентности нуля гипертрансцендентной функции.

Полученный в § 6 результат приложим к доказательству трансцендентности корня уравнения

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n \frac{\Theta(n)x^n}{[\varphi(n)]^{\vartheta(n)}} = 0, \tag{27}$$

где $0 < F < \Theta(n) < \mathcal{E}$, при этом рациональное,
где $\mathcal{E}$, F — постоянны,

$\varphi(n)$, $\vartheta(n)$ удовлетворяют условиям § 1: (*)

Функция, стоящая в левой части уравнения (27),— функция трансцендентная (на основании теоремы Эйзенштейна), и более того, не выражается в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных, как это следует из моих исследований; более того, не определяется *никаким алгебраическим дифференциальным уравнением,* т.-е., согласно терминологии Мура [1]), трансцендентно-трансцендентная, а по Малле — *гипертрансцендентная* функция.

Уравнение (27) очевидно имеет *вещественный* корень, ибо, представляя это уравнение в виде

$$f(x) = [\psi_0(x) - \psi_1(x)] + [\psi_2(x) - \psi_3(x)] + \ldots + [\psi_{2m}(x) - \psi_{2m+1}(x)] + \omega_{2m+2}(x),$$

где через ψ означены последовательные знакопеременные члены, мы можем, прежде всего, положить $x = 0$, что даст

$$f(0) = \Theta(0) > 0,$$

а затем распорядиться x таким образом, что

$$\psi_j(x) - \psi_{j+1}(x) < 0, \qquad (0 \leqslant j \leqslant 2m),$$

---

[1]) N. Moore. Concerning Transcendentally Transcendental Functions. Mat. Ann. B. 48. 1897.
Д. Мордухай-Болтовской. О некоторых арифметических свойствах решений дифференциальных уравнений. „Мат. сб." 1910.

Maillet. Introduction à la théorie des nombres transcendents. Paris. 1906. Note III, p. 242.
Heinrich Tietze. Monatshefte für Math. und Phys. 1916. S. 311; там же библиография по этому вопросу.

чего всегда достигнем, взяв (при достаточно большом m)

$$x=\bar{x}=\frac{\varphi(2m+1)^{\vartheta(2m+1)}}{\varphi(2m)^{\vartheta(2m)}}\,\frac{F}{\mathcal{E}}.$$

В самом деле, при достаточно больших n

$$\frac{\Theta(j)}{\Theta(j+1)}\;\frac{\varphi(j+1)^{\vartheta(j+1)}}{\varphi(j)^{\vartheta(j)}}\;\frac{\varphi(2m)^{\vartheta(2m)}}{\varphi(2m+1)^{\vartheta(2m+1)}}\,\frac{F}{\mathcal{E}}<1, \tag{28}$$

так как

$$\frac{\varphi(2m)^{\vartheta(2m)}}{\varphi(2m+1)^{\vartheta(2m+1)}}<\frac{1}{(2m+1)^{\vartheta(2m+1)}\varphi(2m)^{\vartheta(2m+1)\left[1-\frac{\vartheta(2m)}{\vartheta(2m+1)}\right]}}$$

в силу условий (*) § 1:

$$\frac{\varphi(2m)^{\vartheta(2m)}}{\varphi(2m+1)^{\vartheta(2m+1)}}\,\varphi(j+1)^{\vartheta(j+1)}<\frac{\varphi(2m)^{\vartheta(j+1)}}{\varphi(2m)^{\vartheta(2m+1)\left[1-\frac{\vartheta(2m)}{\vartheta(2m+1)}\right]}}<$$

$$<\frac{1}{\varphi(2m)^{\vartheta(2m+1)\left[1-\frac{\vartheta(m)}{\vartheta(2m+1)}-\frac{\vartheta(j+1)}{\vartheta(2m+1)}\right]}},$$

и потому левая часть неравенства (28) имеет своим пределом 0, и неравенство при достаточно большом m удовлетворяется.

Остается только доказать, что при достаточно большом m

$$\omega_{2m+2}\left[\frac{\varphi(2m+1)^{\vartheta(2m+1)}}{\varphi(2m)^{\vartheta(2m)}}\,\frac{F}{\mathcal{E}}\right]$$

как угодно мало.

Замечая, что в неравенстве

$$\omega_{2n+2}(\bar{x})<\sum_{j=2}^{j=\infty}|\psi_{2n+j}(\bar{x})|,$$

$$|\psi_{2n+j}(\bar{x})|<\frac{E}{\varphi(2m+j)^{\vartheta(2m+1)}},$$

а ряд

$$\sum_{j=1}^{j=\infty}\frac{1}{\varphi(2m+j)^{\vartheta(2m+1)}}$$

сходящийся, — доказываем этот пункт.

Трансцендентность корня уравнения (27) будет доказана согласно $(\overline{26})$ § 8, если установим, что для достаточно больших m

$$|R_m|<\frac{1}{\varphi(m)^{m\vartheta(m)}}. \tag{29}$$

Но

$$|R_m|<\frac{\Theta(m+1)}{\varphi(m+1)^{\vartheta(m+1)}\,|\xi|^{m+1}}, \tag{30}$$

где ξ — конечное число.

Нам это удастся, если докажем, что предел отношения правой части неравенства (30) к правой части неравенства (29) равен нулю, что в действительности имеет место, так как это отношение равно

$$\frac{\Theta(m+1)\,|\,\xi\,|^{m+1}}{(m+1)^{\vartheta(m+1)}}\,\frac{1}{\varphi(m)^{\vartheta(m+1)\left[1-\frac{\vartheta(m)}{\vartheta(m+1)}\right]}}<F\frac{1}{\varphi(m)^{\vartheta(m+1)\left[1-\frac{\vartheta(m)}{\vartheta(m+1)}\right]}}.$$

Предел же правой части последнего неравенства равен нулю.

§ 10. Низшая граница для $\Sigma C_j e^{x_j}$. Упрощение проблемы.

От условий алгебраичности переходим к условиям выражаемости через *показательное* построение первого класса, иначе говоря,— через алгебраическую функцию (§ 5) от основных трансцендентных

$$e^{\alpha_j},$$

где α_j — алгебраические числа.

При этом начнем с простейшего случая.

Будем предполагать сперва H *полиномом* с алгебраическими коэффициентами, в каковом случае он сводится к линейной функции от e^{z_i}, где z_j — алгебраические числа

$$U=C_1e^{z_1}+C_2e^{z_2}+\cdots C_pe^{z_p}, \tag{31}$$

где C_j — алгебраические числа.

Чтобы найти достаточное условие невыражаемости числа через эту форму, мы установим низшую границу ω отклонения рациональной дроби $\frac{\gamma}{\delta}$ от формы $C_1e^{z_1}+C_2e^{z_2}+\cdots+C_pe^{z_p}$, так что

$$\left|C_1e^{z_1}+C_2e^{z_2}+\cdots+C_pe^{z_p}-\frac{\gamma}{\delta}\right|>\omega \tag{32}$$

или

$$\left|\frac{D_1e^{z_1}+D_2e^{z_2}+\cdots+D_pe^{z_p}-\gamma e^0}{\delta}\right|>\omega.$$

Последняя форма неравенства (32) указывает, что дело будет итти об определении низшей границы для формы (31).

Прежде следует отметить, что мы в наших исследованиях можем ограничиться простейшим случаем, когда C_j — *целые рациональные числа.*

В самом деле, если C_j — алгебраические числа, то можно всех их выразить рационально в

$$t=\sum_{j=1}^{j=p}k_jC_j,$$

где k_j — некоторые целые числа, а t определяется уравнением

$$\omega(t)=0 \tag{33}$$

с целыми коэффициентами.

Придавая t значения, равные корням уравнения (33), получаем из U:

$$U',\ U'' \dots U^{(s)},$$

$$U \cdot U' \cdot U'' \dots U^{(s)} = \sum_{j=1}^{j=p} D_j e^{z_j} = \frac{\sum_{j=1}^{j=p} E_j e^{z}}{F},$$

где D_j — уже рациональные, а E_j целые числа.

Если

$$\left| \sum_{j=1}^{j=p} E_j e^{z_j} \right| > \omega,$$

то, обозначая

$$|U'U'' \dots U^{(s)}| = T,$$

$$U > \frac{\omega}{FT}, \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned} F &< E, \\ T &< E, \end{aligned} \tag{35}$$

E остается неизменным при возрастании δ.

Далее, мы еще можем предполагать, что в форме (31) $z_1, z_2, \dots z_p$ — корни алгебраического уравнения

$$\beta z^p + \beta_1 z^{p-1} + \dots + \beta_{p-1} z + \beta_p = 0$$

с целыми рациональными коэффициентами β_j, и при этом сумма

$$\sum_{j=1}^{j=p} C_j g(z_j)$$

при всякой *рациональной* функции $g(z)$ дает рациональные числа.

Для этого выражаем z_j рационально в

$$t = \sum_{j=1}^{j=p} k_j z_j,$$

где k_j — целые числа (не зависящие от δ), а t определяется алгебраическим уравнением

$$\vartheta(t) = 0. \tag{36}$$

Беря различные корни: $t,\ t',\ t'' \dots$ последнего уравнения, будем иметь *нормальную* область Ω подстановок, приводящую

$$U = C_1 e^{z_1} + C_2 e^{z_2} + \dots + C_p e^{z_p}$$

к

$$\begin{aligned} U' &= C_1 e^{z_1'} + C_2 e^{z_2'} + \dots + C_p e^{z_p'}, \\ U'' &= C_1 e^{z_1''} + C_2 e^{z_2''} + \dots + C_p e^{z_p''}; \\ & \dots\dots\dots\dots\dots ; \end{aligned}$$

$$P = UU'U''U''' \dots$$

будет вида

$$D_1 e^{x_1} + D_2 e^{x_2} + D_3 e^{x_3} + \cdots,$$

где $x_1, x_2, x_3 \ldots$ получаются подстановками области Ω и представляют корни уравнения

$$\beta x^n + \beta_1 x^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} x + \beta_n = 0, \qquad (37)$$

где β_j целые числа.

Зная *низшую* границу ω для P, ее можно найти и для

$$|U| > \frac{\omega}{M^{n-1}},$$

если

$$U^{(k)}| < M.$$

Отметим еще, что

$$\sum D_j g(x_j) \qquad (38)$$

при всякой рациональной функции $g(x)$ представляет рациональное число.

В самом деле, взяв вместо P произведение

$$\prod [C_1 e^{u_1 z_1} + C_2 e^{u_1 z_2} + \cdots] = D_1 e^{u_1 z_1} + D_2 e^{u_2 z_2} + \cdots,$$

мы получим выражение, не изменяющееся от подстановок Ω. То же относится и к коэффициентам различных степеней, т. е. к $C_1 z_1^h + C_2 z_2^h + \cdots$, а потому и к (38).

§ 11. Низшая граница для $\Sigma C_j e^{x_j}$. Приложение тождества Эрмита-Вебера.

Дальнейшие рассуждения ведутся с помощью тождества

$$F(0) \sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j} = \sum_{j=1}^{j=n} C_j F(x_j) + \sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{|x_j|} \varphi(x_j), \qquad (38)$$

C_j — целые числа.

Здесь x_j определяются уравнением

$$\beta x^n + \beta_1 x^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} x + \beta_n = 0, \qquad (39)$$

причем все суммы (§ 10)

$$S = \sum_{j=1}^{j=n} C_j g(x_j)$$

рациональные дроби,

$$F(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(\nu)}(x), \qquad (40)$$

$$f(x) = \frac{[\varphi(x)]^{p-1} \varphi'(x)}{p-1!}; \qquad (41)$$

p — целое простое число, которым мы ниже распорядимся надлежащим образом,

$$\nu = (n+h)\ (p-1) + n + h - 1,$$

$$\varphi(x) = x^h \psi(x), \qquad (42)$$

$$\psi(x) = (x - x_1)\ (x - x_2) \ldots (x - x_n),$$

$$Q(x) = \partial_\nu q_\nu x^\nu + \partial_{\nu-1} q_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots + \partial_0 q_0, \qquad (43)$$

если

$$F(x) = \partial_\nu x^\nu + \partial_{\nu-1} x^{\nu-1} + \cdots \partial_0 ,$$

а q_ν — некоторые числа модуля меньше 1.

Целое положительное число h выбрано так, что

$$\sum_{j=1}^{j=n} C_j \varphi'(x_j) = \sum_{j=1}^{j=n} C_j x_j^h \psi'(x_j) \lesseqgtr 0, \tag{44}$$

что возможно при $0 \leqslant h < n$, так как иначе $\psi'(x_j)$ обращались бы в нули.

Мы не *будем доказывать* этого тождества, отсылая читателя, например, к алгебре Вебера[1]).

Прежде всего, мы отметим то, что для дальнейшего имеет существенное значение

$$\sum_{j=1}^{j=n} C_j F(x_j) = \frac{\Theta}{\beta^\nu}, \tag{45}$$

где Θ — *целое число и при этом отличное от нуля.*

В самом деле,

$$F(x_j) = \varphi'(x_j)^p + pA_p(x_j) + p(p+1)A_{p+1}(x_j) + \cdots, \tag{46}$$

где A_j — полиномы с целыми коэффициентами.

На основании условия относительно суммы S,

$$\sum_{j=1}^{j=n} C_j F(x_j)$$

рациональное число, а

$$\beta^\nu \sum_{j=1}^{j=n} C_j F(x_j) \text{ —}$$

целое.

Но в силу (46), мы имеем сравнение

$$\beta^\nu \sum_{j=1}^{j=n} C_j F(x_j) \equiv \beta^\nu \sum_{j=1}^{j=n} C_j \varphi'(x_j)^p \equiv \beta^\nu \left[\sum_{j=1}^{j=n} C_j \varphi'(x_j)\right]^p \equiv \beta^\nu k^p (\mathrm{mod}\, p), \tag{47}$$

$$k = \left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j \varphi'(x_j)\right| .$$

В самом деле, при p простом все биноминальные коэффициенты кроме равных единице делятся на p, и кроме того на основании теоремы Ферматa

$$C_j^p \equiv C \,(\mathrm{mod}\, p).$$

---

1) Hermite. Sur la fonction exponentielle. Comptes Rendus LXXVII, 1873.
H. Weber. Lehrbuch der Algebra. B. II, § 226, S. 828.

При переходе же от первого члена ко второму первого сравнения следует иметь в виду, что

$$\beta^{\nu} A_k(x_j)$$

— целые алгебраические числа, а

$$\beta^{\nu} \sum_j A_k(x_j)$$

— целые рациональные числа.

Но вторая часть последнего сравнения (47) при p *простом и большем* β *и* k не делится на p.

Поэтому при p *простом и достаточно большом* можно предполагать, что

$$\beta^{\nu} \sum_{j=1}^{j=n} C_j F(x_j)$$

— целое число неравное нулю.

Будем сперва рассматривать общий случай, когда

$$\beta > 1.$$

Докажем, что при достаточно большом p

$$\left| \sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{|x_j|} Q(x_j) \right| < \frac{1}{\beta^{\nu+1}}. \qquad (48)$$

Этого мы достигнем, если *разрешим это неравенство*, т. е. найдем больше чего должно быть то $q = p - 1$, при котором оно имеет место.

Будем с этой целью упрощать его, заменяя левую часть выражением более простым, но большим.

Конечно, решение $q > q_0$ этого последнего будет также решением (48).

Такое упрощение получим, производя прежде всего замену

$$e^{|x_j|} \text{ на } e^{|x|},$$

где $|x|$ есть $\max |x_j|$.

Обозначая дальше через $\overline{\varphi}(x)$

$$x^m + |l_1| x^{m-1} + |l_2| x^{m-2} + \cdots + |l_m| x^h$$

$$m = n + h, \quad l_j = \frac{\beta_j}{\beta},$$

мы из уравнения (43) получаем, заменяя модуль суммы — суммой модулей:

$$|Q(x_j)| < \frac{[\overline{\varphi}(|x|)]^{p-1} \overline{\varphi}'[|x|]}{q!}. \qquad (49)$$

Полагая

$$\frac{|\beta_j|}{|\beta|} < E \text{ [1]},$$

F — целое число

мы далее имеем

$$\overline{\varphi}(|x|) < E|x|^m (m+1) \qquad |x| > 1,$$
$$< E(m+1) \qquad |x| \leqslant 1;$$

---

[1]) Т. е., считая β_j постоянными, мы заставляем их правильно возрастать.

точно таким же образом

$$|\overline{\varphi}'(|x|)| < m|x|^{m-1} + (m-1)|l_1||x|^{m-2} + \cdots + h|l_n||x|^{h-1} <$$
$$< Em^2|x|^{m-1} \qquad |x| > 1$$
$$< Em^2 \qquad |x| \leqslant 1$$

и окончательно неравенство приводится к следующему

$$|Q(x_j)| < \frac{E^\nu \bar{x}^\nu}{q!}\varrho,$$
$$\varrho = (n+h+1)^3.$$

Кроме того, на основании формулы Стирлинга

$$q! > \left(\frac{q}{e}\right)^q \sqrt{2\pi q},$$

$$\frac{1}{q!} < \frac{1}{q^q e^{-q}\sqrt{2\pi q}} < \frac{1}{q^q e^{-q}\sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом для определения q имеем неравенство

$$\frac{E^\nu \varrho e^{\bar{x}} \sigma}{\sqrt{2\pi} q^q e^{-q}} < \frac{1}{\beta^{\nu+1}}, \tag{50}$$

где $\sigma = \sum_j |C_j|$ или

$$q^q > \frac{\beta^{\nu+1} e^q E^\nu e^{\bar{x}} \varrho\sigma}{\sqrt{2\pi}}. \tag{51}$$

Последнее неравенство удовлетворится, если q будет выбрано так, что

$$\left.\begin{aligned} & q > Ke(\beta E)^{n+h}, && (52)\\ & K^q\sqrt{2\pi} > (\beta E)^{n+h} E^{-1} e^{\bar{x}} \varrho\sigma, && (53)\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} & K > 2 \\ & \lg K > 1 \end{aligned}$$

Первое дает

$$q > g\beta^\nu, \tag{54}$$

$\nu = n + h$ зависит только от n, g же зависит только от n.

Но q можно взять настолько большим, чтобы удовлетворялось неравенство (53) или

$$\frac{K^q}{q} > \frac{e^{\bar{x}}\sigma\varrho}{E\sqrt{2\pi e}}. \tag{55}$$

Что неравенство (53) можно заменить (55), это вытекает из того, что (52) дает при $K > 2$

$$q > (\beta E)^{n+h} e$$

(и неравенство (53 будет выполнено, если

$$K^q \sqrt{2\pi} > qE^{-1}e^x \varrho\sigma.$$

Если положить

$$\frac{e^x \sigma\varrho}{E\sqrt{2\pi e}} = A,$$

то неравенство (55) примет вид

$$\frac{K^q}{q} > A, \tag{56}$$

где A *не зависит от* β, *а только от* n.

Такому неравенству можно удовлетворить, полагая

$$q > \gamma,$$

где γ не зависит от β, а потому *обоим неравенствам* (52) и (53), взяв

$$q > \gamma\beta^v$$

или

$$q = g\beta^v,$$

где

$$g > \gamma.$$

Таким образом, модуль первого члена во второй части тождества (38) больше $\frac{1}{\beta^\nu}$, второго же – меньше $\frac{1}{\beta^{\nu+1}}$, сумма же их больше $\frac{1}{\beta^{\nu+1}}$, ибо

$$|\mathrm{I} + \mathrm{II}| > |\mathrm{I}| - |\mathrm{II}| > \frac{2}{|\beta|^{\nu+1}} - \frac{1}{|\beta|^{\nu+1}} = \left|\frac{1}{\beta^{\nu+1}}\right|.$$

Заметим дальше, что число членов в полиноме

$$f(x) = \frac{[\varphi(x)]^{p-1}\varphi'(x)}{\overline{p-1}!}$$

раньше приведения подобных членов равно

$$(\delta\varphi + 1)^{p-1}\delta\varphi < (\delta\varphi + 1)^p = (n + h + 1)^p,$$

где $\delta\varphi = n + h =$ степень φ.

Замечаем, что коэффициенты $f(x)$ получаются от перемножения коэффициентов

$$\varphi(x),\ \varphi(x)\ldots\varphi'(x)$$

и потому не больше

$$nE^p < n^p E^p,$$

а $|f(x)|$ не больше

$$n^p(n + h + 1)^p E^p x^\nu$$

или

$$N^p \overline{x}^\nu$$

где N *зависит только от n.*

При дифференцировании же вводятся множители ν, $(\nu - 1) \ldots$; поэтому нетрудно видеть, что

$$|f^{(p+1-\mu)}(0)| < N^p \nu! \overline{x}^\nu,$$

а затем, что

$$|F(0)| < N^p \nu! (\nu - p + 1) \overline{x}^\nu < H^p(\nu+1)!,$$

где H опять *зависит только от n и $\overline{x}$.*

Теперь в неравенстве:

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}\right| > \frac{1}{F(0)\beta^{\nu+1}} = \frac{1}{B} \tag{57}$$

будем заменять B *большим* значением, более отвечающим поставленной нами цели.

1) Во-первых, заменяем

$$H^p \beta^{\nu+1}$$

через

$$\overline{\nu+1}!$$

на основании того, что

$$\frac{H^p \beta^{\nu+1}}{\overline{\nu+1}!} < \frac{H^p e^{\nu+1}}{(\nu+1)^{\nu+1}\sqrt{2(\nu+1)\pi}} < \left(\frac{He}{g''}\right)^{\nu+1} \frac{\beta g'' \beta^{n+h}}{\beta^{(n+h)g''\beta^{n+h}}} < \left(\frac{He}{g''}\right)^{\nu+1} < 1,$$

если положить

$$\nu + 1 = g''\beta^{n+h}, \quad g'' > g(n+h)$$

и поставить для g'' (а потому и для g) еще новое условие

$$\frac{He}{g''} < 1,$$

$$g'' > He. \tag{58}$$

Таким образом,

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}\right| > \frac{1}{(\overline{\nu+1}!)^2}. \tag{59}$$

2) Если же мы возьмем еше $q < 2g\beta^{n+h}$, то, согласно теореме Чебышева[1]), положив

$$g\beta^{n+h} + 1 < p < 2g\beta^{n+h} + 1,$$

мы можем считать p *простым числом.*

Но тогда

$$\overline{\nu+1}! < [(n+h)\ (2g\beta^{n+h}+1)]! < 2(n+h+1)g\beta^{n+h}!$$

и

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}\right| > \frac{1}{(t\beta^{n+h}!)^2}. \tag{60}$$

где t *зависит от n и σ.*

---

1) Tchebicheff. Mémoire sur les nombres premiers. Mém. pres. à l'Académie de S.-Petersbourg, t. VII, 1854, p. 17—33. Journal des Mathématiques de Liouville. I Serie, t. XVII, 1852 p. 366—390. J. Bertrand. Journal de l'Ecole Polytechnique. Ch. 30.

Если мы зафиксируем степень уравнения n и коэффициенты C_j и будем менять β, переходя от одного уравнения к другому (правильно меняя β, см. § 3), то неравенство (60) дает нам при достаточно большом β:

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}\right| > \frac{1}{\beta^{2(n+h)!}} \tag{61}$$

так как очевидно

$$\lim_{\beta=\infty} \frac{\beta^{2(n+h)!}}{t\beta^{n+h}!\, t\beta^{n+h}!} = \lim_{\beta=\infty} \frac{\beta^{2(n+h)}\ \beta^{2(n+h)-1}\dots}{t^2\beta^{n+h}\dots\ \beta^{n+h}\dots} = \infty.$$

В случае $\beta = 1$.

Легко видеть, что весь ход рассуждений остается вплоть до неравенства (61), обращающегося в следующее:

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}\right| > \frac{1}{t^2}\ ; \tag{62}$$

конечно, уже отсюда не выводится (61).

§ 12. Об условиях выражаемости формой $\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}$ в случае алгебраических коэффициентов C_j.

В форме (61) неравенство найдет приложение ниже *при исследовании выражаемости через алгебраическую функцию от логарифма.*

Для намеченной в § 10 цели нужна другая форма, которая выводится *анализом зависимости t от σ.*

С этой целью исследуем решение неравенства (56)

$$\frac{K^q}{q} > A = R\sigma,$$

$$R = \frac{e^{\bar{x}}\varrho}{E\sqrt{2\pi e}}.$$

Возьмем

$$\bar{R} = 2, \text{ если } R < 2,$$

$$\bar{R} = R, \text{ если } R \geqslant 2.$$

Тогда неравенству (56) можно удовлетворить, полагая

$$q = \bar{\bar{R}} \lg \sigma. \tag{63}$$

В самом деле, неравенство (56) представится в форме

$$\frac{e^{\lg K . q}}{q} > R\sigma,$$

а по замене q значением (63) в левой части, будем иметь:

$$\frac{\sigma^{\overline{R}\lg K}}{\overline{R}\lg\sigma},$$

и неравенство (56) будет выполнено, если докажем, что (так как $\lg K > 1$)

$$\frac{\sigma^{\overline{R}}}{\lg\sigma} > \overline{R}.$$

Но в этом легко убеждаемся, замечая, что

$$\frac{\sigma^{\overline{R}}}{\overline{R}\lg\sigma} = \frac{z}{\lg z} \qquad (z = \sigma^{\overline{R}})$$

растет безгранично вместе с z.

Таким образом мы можем брать, чтобы удовлетворить неравенствам (52) и (53),

$$q = g\beta^{\nu};$$

g — зависящее от σ и n можем взять равным

$$g = f\lg\sigma, \tag{64}$$

где f уже зависит *только от* n.

Но при доказательстве, что $\sum\limits_{j=1}^{j=n} C_j F(x_j)$ можем предполагать не равной нулю, мы должны были взять

$$p > K = |\Sigma C_j\varphi'(x_j)|.$$

Мы удовлетворим и неравенству (56) и этому условию, если возьмем вместо (64)

$$g = f\sigma\lg\sigma.$$

В самом деле,

$$|\Sigma C_j\varphi'(x_j)| < |\overline{\varphi'}|\,\sigma,$$

где $|\overline{\varphi'}|$ — наибольший из модулей $|\varphi'(x_j)|$.

При достаточно большом σ мы, конечно, имеем:

$$f\beta^{\nu}\sigma\lg\sigma - 1 > |\overline{\varphi'}|\,\sigma.$$

Таким образом при *достаточно большом* σ можем положить

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}\right| > \frac{1}{(f\sigma\lg\sigma\,\beta^{n+h}!)^2}, \tag{65}$$

где f *зависит от* n.

Предположим, что уравнение (39) остается неизменным, но изменяется система чисел

$$C_1,\ C_2 \ldots C_n$$

так, что $\sigma = \Sigma\ |C_j|$ безгранично возрастает.

Тогда при достаточно больших σ

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}\right| > \frac{1}{(r\sigma \lg \sigma!)^2}, \tag{66}$$

где r не зависит от σ.

Но при достаточно большом σ это неравенство можно заменить

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}\right| > \frac{1}{(\sigma \lg \sigma!)^{\mu}} \tag{67}$$

где $\mu = 2(r+1)$.

В самом деле,

$$\lim_{n=\infty} \frac{rn!}{(n!)^{r+1}} = \lim \frac{\sqrt{r}}{e^{\omega}(2n\pi)^{\frac{r}{2}}} = 0,$$

где $\omega = n \lg n - rn \lg r + (r-s)n$,
так как

$$\lim_{n=\infty} \omega = n \lg n \left[1 - \frac{r \lg r}{\lg n} + \frac{r-s}{\lg n}\right] = \infty.$$

Чтобы снять ограничение § 10, замечаем, что сумма модулей коэффициентов P

$$\Sigma < \sigma^l,$$

где l не зависит от σ, и кроме того

$$|u_j| < \sigma f l^{|z|}$$

$|z|$ — наибольший из модулей z_j.

Неравенство (35) дает, на основании (67),

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{z_j}\right| > \frac{1}{l^{(l-1)|z|}\sigma^{l-1}[\sigma^l \lg \sigma^l]^{\mu}}. \tag{68}$$

Замечая, что

$$\lim_{\sigma=\infty} \frac{e^{(l-1)|z|}\sigma^{l-1}[l\sigma^l \lg \sigma!]^{\mu}}{[\sigma^l \lg \sigma!]^{\mu(l+1)}} = 0,$$

можем от (68) перейти к следующему:

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{z_j}\right| > \frac{1}{(\sigma^l \lg \sigma!)^{\rho}}, \tag{69}$$

где $\rho = 2(r+1)(l+1)$ не зависит от σ, l представляет порядок группы Ω.

Далее, имея в виду, что

$$\lim_{\sigma=\infty} \frac{\sigma^l \lg \sigma!}{\sigma^{l+1}!} = 0,$$

мы еще можем написать

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{z_j}\right| > \frac{1}{(\sigma^{l+1}!)^{\rho}}, \tag{70}$$

и наконец в силу того, что

$$\lim_{\sigma=\infty} \frac{(\sigma^{l+1}!)^{\rho}}{\sigma^{\rho(l+1)}!} = 0,$$

также

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}\right| > \frac{1}{\sigma^{v}!} \qquad (71)$$

Дальше мы будем оперировать только с последней формой.

Совершенно таким же образом снимем условие *рациональности*, относящееся к C_j. Неравенство (71) имеет место и в том случае, когда C_j — *целые алгебраические числа.*

Но в случае *дробных* мы заменой $\sum\limits_j C_j e^{x_j}$ на $d\sum\limits_j C_j e^{x_j}$, где d — общий знаменатель C (такое d, что dC_j — целые алгебраические числа), имеем

$$\left|d\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}\right| > \frac{1}{(d\sigma)^{v}!}.$$

Но

$$\lim_{\sigma=\infty} \frac{d(d\sigma^{v}!)}{\sigma^{v+1}!} = 0,$$

так как

$$\lim_{\sigma=\infty} \sigma^{v+1} \lg\sigma \left[(v+1) - \frac{dv}{\sigma}\right] = \infty$$

и мы можем написать также

$$\left|\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{x_j}\right| > \frac{1}{\sigma^{v+1}!}.$$

Возьмем теперь разность

$$\left|\xi - \gamma\right| = \left|C_1 e^{x_1} + C_2 e^{x_2} + \ldots + C_n e^{x_n} - \frac{\gamma}{\delta}\right| = \left|\frac{C_1\delta e^{x_1} + C_2\delta e^{x_2} + \ldots + C_n\delta e^{x_n} - \gamma}{\delta}\right|,$$

где $\frac{\gamma}{\delta}$ — рациональное число.

Мы будем иметь тогда на основании доказанного в силу неравенства (71)

$$\left|\xi - \frac{\gamma}{\delta}\right| > \frac{1}{\delta(\tau^{v}!)},$$

где $\tau = \Sigma\delta(C_j) + |\gamma| < \delta l$, $l = \Sigma(C_j) + k$, где k — определенное число, превосходящее $\frac{\gamma}{\delta}$.

Таким образом

$$\left|\xi - \frac{\gamma}{\delta}\right| > \frac{1}{\tau^{v+1}!}.$$

Если трансцендентное число формы

$$\xi = C_1 e^{x_1} + C_2 e^{x_2} + \ldots + C_n e^{x_n},$$

где C_j, x_j — алгебраические числа,— приближенно выражается рациональными дробями $\frac{p}{q}$, то для всех q, превосходящих некоторую границу,

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^v!} \tag{72}$$

для некоторого $v > 0$ независящего от q.

Это, конечно, условие *необходимое, но вовсе не достаточное* выражаемости формой линейно-показательной.

Как следствие вытекает условие *не необходимое,* а *только достаточное* невыражаемости этой формой.

Если для всякого $v > 0$, при достаточно большом q

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^v!}, \tag{73}$$

то число ξ не выражается линейно-показательной формой.

§ 13. Об условиях выражаемости показательной трансцендентной первого класса.

Этот результат нетрудно распространить на случай *какой угодно алгебраической функции от e^{x_1}, $e^{x_2} \ldots e^{x_n}$.*

Сперва возьмем рациональную функцию от основных трансцендентных; она сводится к виду

$$\xi = \frac{C_1 e^{x_1} + C_2 e^{x_2} + \ldots + C_n e^{x_n}}{D_1 e^{x_1} + D_2 e^{x_2} + \ldots + D_n e^{x_n}},$$

где C_j, D_j, x_j — алгебраические числа.

$$\left|\xi - \frac{\gamma}{\delta}\right| = \left|\frac{(C_1\delta + D_1\gamma)\, e^{x_1} + \ldots}{\delta(D_1 e^{x_1} + D_2 e^{x_2} + \ldots}\right| > \frac{1}{G\tau^v!}, \tag{74}$$

где $|D_1 e^{x} + D_2 e^{x_2} + \ldots| < G$, G не зависит от δ,

$$\tau = \Sigma\,|C_j\delta + D_j\gamma| < \delta[\sum_j |C_j| + k\Sigma\,|D_j|] = \delta l;$$

l не зависит от δ, вследствие чего последнее неравенство (74) можем заменить

$$\left|\xi - \frac{\gamma}{\delta}\right| > \frac{1}{\delta^\omega!},$$

где $\omega = v + 1$ не зависит от δ.

Для перехода к общему случаю алгебраической функции следует использовать неравенство Л ь ю в и л л я (7, § 2)

$$\left|\xi - \frac{\gamma}{\delta}\right| > \frac{\left|f\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)\right|}{M},$$

если

$$f(\xi)=f_0(e^{x_1},\ e^{x_2}\ldots)\xi^k+f_1(e^{x_1},\ e^{x_2}\ldots)\xi^{k-1}+\ldots+f_k(e^{x_1},\ e^{x_2}\ldots).$$

Но

$$f\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)=\frac{\gamma^k f_0(e^{x_1},\ e^{x_2}\ldots)+\gamma^{k-1}\delta f_1(e^{x_1},\ e^{x_2}\ldots)+\ldots+\delta^k f_k(e^{x_1},\ e^{x_2}\ldots)}{\delta^k}$$

можно подвести под форму

$$\frac{C_1e^{x_1}+C_2e^{x_2}+\ldots+C_ne^{x_n}}{\delta^k};$$

сумма модулей коэффициентов меньше $\delta^k H$, где k уже не зависит от δ, и

$$\left|f\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)\right|>\frac{1}{\delta^k(\delta^k H)^r!},\qquad \left|\xi-\frac{\gamma}{\delta}\right|>\frac{1}{M\delta^k(\delta^k H)^r!},$$

что мы можем заменить

$$\left|\xi-\frac{\gamma}{\delta}\right|>\frac{1}{\delta^{\omega}!}.$$

Таким образом, *если число выражается общим показательным построением первого класса* и *если оно приближенно выражается рациональными дробями* $\frac{p}{q}$, *то для всех* q, *превосходящих некоторую границу,*

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{q^r!} \tag{72}$$

для некоторого r, *не зависящего от* q.

Отсюда сейчас же следует и *достаточное условие невыражаемости трансцендентной показательной* 1-*го класса*, определяемой неравенством (73) при достаточно большом q.

Простейшим примером, не выражаемым показательно-трансцендентной 1-го класса, в частности алгебраически через e, является

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n!)^{n!^{n!^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{n!}}}}}}} \tag{75}$$

(возведение в степень n раз).

Вообще, то же можно утверждать о числе

$$1+\frac{1}{[\varphi(1)]^{\vartheta(1)}}+\frac{1}{[\varphi(2)]^{\vartheta(2)}}+\ldots+\frac{1}{[\varphi(n)]^{\vartheta(n)}}+\ldots \tag{76}$$

при следующих условиях, налагаемых на $\varphi(n)$ и $\vartheta(n)$:

$$\varphi(n+1)\geqslant\varphi(n)\,(n+1)$$

$$\varphi(n+1)\ \text{делится на}\ \varphi(n)$$

$$\vartheta(n+1)>\vartheta(n)^{n\vartheta(n)}$$

$$\varphi(n)\leqslant\vartheta(n).$$

§ 14. Трансцендентное число, выражаемое показательным построением первого класса, приближенно определяемое рядом алгебраических уравнений.

Возьмем теперь *обобщенный* способ приближенного выражения трансцендентного числа § 3.

А именно, будем предполагать, что приближенные значения ω числа ξ определяются алгебраическими уравнениями:

$$c_0\omega^m + c_1\omega^{m-1} + \ldots + c_{m-1}\omega + c_m = 0, \tag{77}$$

которые мы будем, конечно, предполагать *неприводимыми*, причем будем предполагать, что m остается неизменным, а c_j возрастают, так что

$$\frac{c_j}{c_0} < E.$$

Обозначив через $\omega_1, \omega_2 \ldots \omega_m$ корни уравнения (77), будем иметь:

$$c_0(\xi - \omega_1)(\xi - \omega_2)\ldots(\xi - \omega_m) = c_0\xi^m + c_1\xi^{m-1} + \ldots + c_{m-1}\xi + c_m.$$

Взяв затем для ξ различные значения в $e^{x_1}, e^{x_2}\ldots$ определяемые уравнением

$$f_0(e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots)\xi^n + f_1(e^{x_1}, e^{x_2}\ldots)\xi^{n-1} + \ldots + f_n(e^{x_1}, e^{x_2}\ldots) = 0, \tag{78}$$

получаем:

$$c_0^n \prod_{j=1}^{j=n}(\xi_j - \omega_1)(\xi_j - \omega_2)\ldots(\xi_j - \omega_m) = \Theta(e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots e^{x_p}). \tag{79}$$

Для Θ имеем выражение

$$\sum c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1} \ldots c_m^{\alpha_m} \Theta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}(\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_n); \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_m = n$$

здесь $\Theta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}$ — полиномы от ξ_j с целыми коэффициентами.

Сумма модулей коэффициентов Θ будет не больше

$$\overline{\Theta}\sum |c_0^{\alpha_1} c_1^{\alpha_1} \ldots c_m^{\alpha_m}|,$$

где $\overline{\Theta}$ — наибольший из сумм модулей коэффициентов

$$\Theta_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m}.$$

Так как, далее,

$$\sum |c_0^{\alpha_1} c_1^{\alpha_1} \ldots c_m^{\alpha_m}| \leqslant \{|c_0| + |c_1| + \ldots + |c_m|\}^n < \sigma^n$$

$$\sigma = \sum_{j=0}^{j=m} c_j,$$

то

$$|\Theta| > \frac{1}{\sigma^{nv}!} = \frac{1}{\sigma^{\omega}!};$$

замечая дальше, что

$$|c_0|(\xi_j-\omega_1)(\xi_j-\omega_2)\ldots(\xi_j-\omega_m)| < |c_0| N \leqslant \sigma N \quad j=2, 3\ldots n$$
$$|c_0|(\xi_1-\omega_2)(\xi_1-\omega_3)\ldots(\xi_1-\omega_m)| < |c_0| N \leqslant \sigma N$$

где N остается неизменным при изменении c_j, — получаем из (79)

$$|\xi_1-\omega_1| > \frac{1}{\sigma^n N^n \sigma^{\omega}!},$$

которое легко приведется к виду

$$|\xi-\omega| > \frac{1}{\sigma^{v}!}, \tag{80}$$

где c не зависит от c_j.

Получается теорема, аналогичная теореме Бореля § 7.

Если число ξ определяется приближенно корнями уравнений определенной степени m с целыми коэффициентами, правильно изменяющимися

$$b_0^{(j)}y^m + b_1^{(j)}y^{m-1} + \ldots + b_{m-1}^{(j)}y + b_m^{(j)} = 0,$$

в которых $b_0^{(j)}$ при достаточно большом j может быть сделано как угодно велико, то число x не определяется показательной трансцендентной первого класса, если при всяком $v > 0$ и достаточно большом j

$$|y-x| > \frac{1}{b^{(j)v}!}, \tag{81}$$

где $b^{(j)}$ — высота уравнения (16_j).

§ 15. Условия выражаемости через алгебраическую функцию от логарифма алгебраического числа [1]).

Пусть в форме

$$U = c_1 e^{x_1} + c_2 e^{x_2} + \ldots + c_n e^{x_n};$$

x_k определяются уравнениями:

$$\beta_{k,0}^{(j)} x_k^{m_k} + \beta_{k,1}^{(j)} x_k^{m_k-1} + \ldots + \beta_{k,m_k}^{(j)} = 0;$$

тогда

$$t = \sum_{j=1}^{j=p} c_j k_j = \frac{\delta}{\beta}; \quad \beta \leqslant \beta_{10}\beta_{20}\ldots\beta_{n0}, \tag{39$'_k$}$$

(где δ — целое алгебраическое число, β — целое рациональное)

---

1) В основе настоящего § лежат мои заметки в Comptes Rendus, t. 176, 177, 1923 года. Работы Бореля (C. R., t. 78, 1899 г.) мне были совершенно неизвестны, равным образом его монография Leçons sur la théorie de la croissence. Борель выводит низшую границу для $\left(l-\frac{p}{q}\right)$, но в другой форме, чем я. В наших рассуждениях есть общие пункты.

будет определяться уравнением

$$\beta t^m + \beta_1 t^{m-1} + \ldots + \beta_m = 0.$$

Тогда на основании § 10, 11

$$U > \frac{1}{\beta^v!}. \qquad (*)$$

Если предположить, что с возрастанием j

$$\frac{\beta_{k0}^{(j)}}{\beta_{10}^{(j)}} < E,$$

E не зависит от j, — то

$$U < \frac{1}{(E\beta_{10}^{(j)})^v!}$$

или

$$U > \frac{1}{\beta_{10}^{(j)}\omega!},$$

так что в неравенстве (*) мы можем за β считать коэффициент при старшем члене уравнения определяющего алгебраическое число x_1.

Теперь переходим [1]) к условиям выражаемости через алгебраическую функцию от логарифма, иначе говоря, число, определяемое уравнением:

$$f(\xi) = c_0 e^{m\xi} + c_1 e^{(m-1)\xi} + \ldots + c_{m-1} e^{\xi} + c_m = 0, \qquad (82)$$

где m — целое положительное число.

Вместо уравнения (82) можем взять и более общее:

$$c_1 e^{\alpha_1 \xi} + c_2 e^{\alpha_2 \xi} + \ldots + c_n e^{\alpha_n \xi} = 0, \qquad (83)$$

где α_j алгебраические числа, и поставить задачу *о выражении трансцендентного числа через алгебраическую функцию числа, определяемого уравнением типа* (83).

Нетрудно видеть, что таким числом ξ будет sin или cos *алгебраического* числа; вообще, решение уравнения:

$$y_{x=c} = 0,$$

где c — рациональное число, а y — решение линейного дифференциального уравнения:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

с *целыми* коэффициентами a_j при начальных данных:

$$y_0 = b,\ y'_0 = b_1, \ldots y^{(n-1)} = b_{n-1},$$

где b_j — рациональные, или общее, алгебраические числа (срав. § 5).

Пользуясь неравенством Л ь ю в и л л я (§ 2),

$$|\xi - x| > \frac{|f(x)|}{M} \qquad (7)$$

---

[1]) Условие (*) в этом случае, конечно, *выполнено*.

или его обобщением

$$|\xi - x| > \frac{\sqrt[p]{|f^{(p)}(x)|}}{M_p},$$

принимая в соображение, что нули функции

$$\sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{\alpha_j \xi}$$

могут быть особыми точками, получаем из неравенства (61) § 11.

$$|f(x)| = \left| \sum_{j=1}^{j=n} C_j e^{\alpha_j x} \right| > \frac{1}{\beta^{v}!}$$

$v = 2(m+h)$

$$|\xi - x| > \frac{1}{\beta^{\omega}!}$$

$\omega = 2(m+h)+1$,

предполагая, что x определяется уравнением

$$\beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \ldots + \beta_{m-1} x + \beta_m = 0,$$

в котором β_j правильно возрастают.

Таким образом, *если $\xi = \lg \omega$, где ω — алгебраическое число — приближенно выражается корнями уравнений,*

$$\beta_0^{(j)} x^m + \beta_1^{(j)} x^{m-1} + \ldots + \beta_{m-1}^{(j)} x + \beta_m^{(j)} = 0,$$

где с j $\beta_k^{(j)}$ бесконечно возрастают так, что $\frac{\beta^{(j)}}{\beta_0^{(j)}} < E$, — то, начиная с некоторой границы

$$|\xi - x| > \frac{1}{\beta_0^{(j)v}}, \tag{83'}$$

где v не зависит от j.

Отсюда выводится достаточное условие невыражаемости через логарифм алгебраического числа, аналогичное условию § 14, выражаемое неравенством

$$|\xi - x| < \frac{1}{\beta_0^{(j)v}!}. \tag{84}$$

Для частного случая приближенного выражения рациональной дробью будем иметь: *если число выражается логарифмом алгебраического числа и если рациональные дроби $\frac{p}{q}$ представляют его приближение, то для q больше некоторой границы*

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{v}!} \tag{85}$$

где $v > 0$ не зависит от q.

Достаточное условие *невыражаемости* будет определяться неравенством

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{v}!} \tag{86}$$

для всякого v и при достаточно большом q.

Из неравенства

$$\left|\log \omega - \frac{\alpha}{\beta}\right| > \frac{1}{\beta^{v}!}, \qquad x = \frac{\alpha}{\beta}, \ \xi = \log \omega,$$

где α — *целое алгебраическое число*, β — целое рациональное число,— выводим аналогичное неравенство и для (вообще) *алгебраической функции от* $\log \omega$.

Сперва для *целого полинома* имеем:

$$|\Omega(\log \omega)| = |\beta|^{n} \prod_{j=1}^{j=\nu} |(\log \omega - x_j)| > \frac{\beta^{n}}{\beta^{\nu v}!} > \frac{1}{\beta^{\omega}!}$$

$$\omega = (v+1)(4m+1)$$

при достаточно больших, β так как, как нетрудно убедиться вычислением,

$$\lim_{\beta=\infty} \frac{\beta^{(\nu+1)v}!\ \beta^{n}}{\beta^{\nu v}!} = \infty.$$

Отсюда общим путем (§ 13) наш результат распространяется и на случай *алгебраической функции общего типа от* $\log \omega$.

Замечаем, что

$$\left|\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right| > \frac{\left|f\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right|}{M},$$

где положено

$$f(\xi) = f_0(\log \omega)\,\xi^{k} + f_1(\log \omega)\,\xi^{k-1} + \ldots + f_k(\log \omega)$$

и

$$f\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \left|\frac{\alpha^{k} f_0(\log \omega) + \alpha^{k-1}\beta f_1(\log \omega) + \ldots + \beta^{k} f_k(\log \omega)}{\beta^{k}}\right|.$$

Далее, модуль коэффициента при старшем члене $(\log \omega)^{\rho}$ в числителе

$$T = |\alpha^{k}\overline{f}_0 + \alpha^{k-1}\beta\overline{f}_1 + \ldots + \beta^{k}\overline{f}_k|,$$

где $\overline{f}_j$ — модули коэффициентов $(\log \omega)^{\rho}$ в $f_0, f_1 \ldots f_k$.

$$T < \beta^{k} H < \beta^{n} F \overline{\gamma}^{n},$$

$$H = f_0 |\gamma|^{k} + f_1 |\gamma|^{k-1} + \ldots + f_k,$$

$$\begin{matrix} \overline{\gamma} = |\gamma| & |\gamma| > 1 \\ \overline{\gamma} = 1 & |\gamma| \leqslant 1 \end{matrix}, \quad F = \sum_{j=0}^{j=k} f_j,$$

и, таким образом, не зависит от β.

Поэтому

$$|\xi - x| > \frac{1}{\{\beta^k H |\bar{x}|^k\}^\nu!}.$$

Последнее неравенство обычным порядком приводится к виду

$$|\xi - x| > \frac{1}{\beta^\omega!},$$

где $\omega = (\nu + 1)(4m + 1)k + 1$ не зависит от β.

Ограничиваясь случаем приближенной выражаемости рациональной дробью $\frac{p}{q}$, можем сказать, что

если число ξ выражается алгебраической функцией от $\lg \omega$, где ω — алгебраическое число и приближенно выражается рациональными дробями, то для некоторых $p > 0$ при q, превосходящем некоторую границу, —

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{q^\nu!}.$$

Так как $\pi = \frac{\lg(-1)}{i}$, то то же условие имеет место и для чисел, *выражающихся алгебраически через π.*

Условие невыражаемости: существование для всякого ν такого q, что

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^\nu!}.$$

Выведенные условия относятся и к алгебраическим функциям $\sin\omega$, $\cos\omega$ и т. д., где ω — алгебраическое число. Функции, приводимые примерами в § 13, не выражаются не только алгебраической функцией e, но также и алгебраической функцией π.

§ 16. Условия выражаемости чисел некоторыми построениями второго класса.

Посмотрим теперь, каково условие определяемости ξ уравнением

$$A[e^{\alpha_1(\xi)}, e^{\alpha_2(\xi)} \ldots e^{\alpha_p(\xi)}, e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots e^{x_n}, \xi] = 0, \tag{87}$$

где $\alpha_j(\xi)$ алгебраические функции ξ, x_1, $x_2 \ldots$ алгебраические числа, A знак целого полинома с целыми коэффициентами.

Предполагая ξ корнем уравнения (87), точку ξ или *обыкновенной точкой или особой алгебраического типа*, мы будем иметь в виду неравенство Л ь ю в и л л я (7) § 2 или его обобщение $(7)_p^\nu$ § 3

$$|\xi - x| > \frac{\sqrt[p]{|f(x)|^\nu}}{M_p^\nu} = \frac{|A|^{\frac{\nu}{p}}}{M_p^\nu}. \tag{$7)_p^\nu$}$$

A — результат подстановки в левую часть уравнения (87) вместо $\xi \ldots x$, т. е.

$$A[e^{y_1}, e^{y_2} \ldots e^{y_n}, e^{x_1}, e^{x_2} \ldots e^{x_n}, x],$$

где y_j — тоже алгебраические числа.

Но на основании доказанного в § 11, именно — на основании неравенства (61), рассуждениями, аналогичными § 15, получаем

$$|A| > \frac{1}{\gamma^{\tau}!}, \tag{88}$$

где γ — коэффициент при высшей степени уравнения

$$\omega(t) = 0,$$

определяющего число

$$t = \sum_{j=1}^{j=p} l_j y_j + \sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i + mx,$$

(l_j, m_i, m — некоторые целые рациональные числа) через которое рационально выражаются x_i, y.

Если

$$x = \frac{\alpha}{\beta}, \quad x_i = \frac{\alpha_i}{\varepsilon}, \quad y_j = \frac{\gamma_j}{\delta},$$

где α, α_i, γ_j — *целые алгебраические* числа, а β, δ целые рациональные числа, то

$$\gamma = \beta\delta\varepsilon, \text{ причем } \delta = \beta^l,$$

где l не зависит от β, и неравенство (88) можем заменить

$$|\xi - x| > \frac{1}{\beta^{\omega}!};$$

ω не зависит от β, т. е. имеем условие § 15 с вытекающими из него следствиями.

Мы, таким образом, имеем условие *невыражаемости неявным* показательным построением первого класса.

Возьмем частный случай уравнения (87)

$$A[e^{\alpha(\xi)}, e^{x_1}, e^{x_2} \ldots x] = 0,$$

дающий

$$\xi = H[\lg \Phi(e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, x)]$$

в форме уже *явного* построения *2-го класса* специального типа. На него распространяется признак § 15, выведенный для логарифмической функции от логарифма.

Отметим, не углубляясь, еще трансцендентное уравнение

$$A[\lg \alpha(\xi), \xi] = 0, \tag{89}$$

где A — полином.

Рассуждая таким же точно образом и пользуясь результатом § 15, получаем:

$$|\xi - x| > \frac{1}{\gamma^{v}!},$$

где γ — коэффициент при старшей степени $\lg \alpha(\xi)$ в уравнении

$$\prod_{j=1}^{j=m} A[\lg \alpha(\xi),\ x_j] = \beta^m \delta \lg^\rho \alpha(\xi) + \ldots = 0;$$

δ — коэффициент при старшей степени $\lg \alpha(\xi)$ в (89), так что

$$\gamma = \beta^m \delta.$$

Отсюда получаем опять

$$|\xi - x| > \frac{1}{\beta^{\omega}!}, \tag{83'}$$

где ω не зависит от β, и все отсюда вытекающие следствия.

§ 17. Исследование нулей функции $A[e^{\alpha_1(\xi)},\ e^{\alpha_2(\xi)} \ldots e^{x_1},\ e^{x_2} \ldots \xi]$.

Исследование предыдущего § не *полно*. Мы должны распространить полученный результат и на случай, когда $\xi = \xi_0$ *существенно-особая точка*, что будет тогда лишь, когда при $\xi = \xi_0$

$$\alpha_j(\xi) = \infty.$$

Не трудно функцию A представить в виде:

$$P_0(\xi) + \sum_{j=1}^{j=m} e^{\theta_j(\xi)} P(\xi); \tag{90}$$

каждые две $\theta_j(\xi)$ не равны между собой.

Здесь $P_j(\xi)$ для $\xi = \xi_0$ алгброиды, причем $P_j(\xi)$ представляется построением

$$\sum_g e^{\gamma_j^{(g)}(\xi)} Q_j^{(g)}(\xi), \tag{91}$$

$\gamma_j(\xi)$ — алгеброид

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} \gamma_k^{(j)} (\xi - \xi_0)^{\frac{j}{d}}$$

не обращающийся в ∞ при $\xi = \xi_0$, $Q_j(\xi)$ полиномы; что касается до $\theta_j(\xi)$, то

$$\theta_j(\xi) = \frac{A_{n_j}^{(j)}}{(\xi - \xi_0)^{\frac{n_j}{d}}} + \ldots + \frac{A_1^{(j)}}{(\xi - \xi_0)^{\frac{j}{d}}}. \tag{92}$$

Мы теперь докажем, что $\xi = \xi_0$ обязательно корень уравнения

$$P_j(\xi) = \sum_j e^{\gamma_j(\xi)} Q_j(\xi) = 0, \tag{93}$$

т. е. $\xi = \xi_0$ — обязательно *критическая алгебраическая* точка функции, выражаемой линейно-показательной формой.

Прежде всего, левую часть уравнения, определяющего ξ_0, представим в форме:

$$P_0(\xi)e^{-\theta_1(\xi)} + P_1(\xi) + \sum_{j=2}^{j=m} P_j(\xi)e^{n_j(\xi)}. \tag{94}$$

$$n_j(\xi) = \Theta_j(\xi) - \Theta_1(\xi).$$

Причем будем предполагать, что n_1 из n_j выбрано так:

1) n_1 наибольший из n_j,

2) если несколько равных: $n_1 = n_2 = \ldots n_j$,

то n_1 — тот, для которого вещественная часть коэффициента A_{n_j} *наибольшая,*

3) если вещественная часть A_{n_1} = вещ. часть A_{n_2} = вещ. часть A_{n_v} [1]), то взят тот член, для которого вещественная часть следующего коэффициента *наибольшая,* и т. д.

Будем приближать ξ к ξ_0, *ограничивая некоторым образом направление.*

Положим:

$$\frac{1}{\xi - \xi_0} = \varrho(\cos\varphi + c\sin\varphi),$$

где ϱ заставим бесконечно возрастать, а на φ наложим ограничение.

Если

$$A_n = R_n[\cos\psi_n + \sin\varphi_n],$$

то

$$\frac{A_{n_j}^{(j)}}{(\xi - \xi_0)^{\frac{n_j}{d}}} = \varrho^{\frac{n}{d}} R_n\left[\cos\left(\frac{n\varphi}{d} + \psi_n^{(j)}\right) + i\sin\left(\frac{n\varphi}{d} + \psi_n^{(j)}\right)\right]. \tag{95}$$

Заметим, что

$$\lim_{\xi = \xi_0} e^{\theta_1(\xi)} = \infty,$$

если

$$0 < \frac{n\varphi}{d} + \psi_n^{(j)} < \frac{\pi}{2}. \tag{96}$$

Этим неравенством (96) и определяются возможные значения для φ.

Первый член суммы (94) приводится к нулю.

Рассмотрим, что будет с третьим.

Простейший случай, когда $n_j < n$.

Тогда в сумме

$$\eta_j(\xi) = \frac{A_{n_j}^{(j)}}{(\xi - \xi_0)^{\frac{n_j}{d}}} + \ldots - \frac{A_{n_1}^{(1)}}{(\xi - \xi_0)^{\frac{n_j}{d}}} \cdots$$

членом высшего измерения будет

$$\frac{A_{n_1}^{(1)}}{(\xi - \xi_0)^{\frac{n_1}{d}}},$$

---

[1]) Одну из вещ. частей A_{n_1} можем предполагать положительной, ибо иначе, приближая ξ к ξ_0, получили бы $P_0(\xi) = 0$, и положение было бы доказано.

и, очевидно,

$$\lim_{\xi=\xi_0} e^{\eta_j(\xi)} = 0.$$

Если $n = n$, то

$$\eta_j(\xi) = \frac{A_{n_j}^{(j)} - A_{n_1}^{(1)}}{(\xi - \xi_0)^{\frac{n_j}{d}}} + \ldots$$

На основании (95):

$$\frac{A_{n_j}^{(j)} - A_{n_1}^{(1)}}{(\xi - \xi_0)^{\frac{n_1}{d}}} = \varrho^{\frac{n_1}{d}} \left\{ \left[R_n^{(j)} \cos\left(\frac{n\varphi}{d} + \psi_n^{(j)}\right) - R_n^{(1)} \cos\left(\frac{n\varphi}{d} + \psi_n^{(1)}\right) \right] \right\} +$$

$$+ i \left[R_n^{(j)} \sin\left(\frac{n\varphi}{d} + \psi_n^{(j)}\right) - R_n^{(1)} \sin\left(\frac{n\varphi}{d} + \psi_n^{(1)}\right) \right].$$

Если вещ. ч. $A_n^{(1)} >$ вещ. ч. $A_n^{(j)}$, т. е.

$$R_n^{(1)} \cos \psi_n^{(1)} > R_n^{(j)} \cos \psi_n^{(j)},$$

то вместе с тем и

$$R_n^{(1)} \cos\left(\frac{n\varphi}{d} + \psi_n^{(1)}\right) > R_n^{(j)} \cos\left(\frac{n\varphi}{d} + \psi_n^{(j)}\right), \tag{97}$$

и потому опять

$$\lim_{\xi=\xi_0} e^{\eta_j(\xi)} = 0. \tag{98}$$

Если же вещ. ч. $A_n^{(1)} =$ вещ. ч. $A_n^{(j)}$, т. е.

$$R_n^{(1)} \cos \psi_n^{(1)} = R_n^{(j)} \cos \psi_n^{(j)},$$

то или $A_n^{(1)} = A_n^{(j)}$, или же можно найти φ, заключающееся в границах (96) такое, что условие (97), а потому и (98) соблюдены.

Если же $A_n^{(1)} = A_n^{(j)}$, то следует исследовать

$$e^{\eta_j(\xi)}$$

при

$$\eta_j(\xi) = \frac{A_{n-1}^{(j)} - A_{n-1}^{(1)}}{(\xi - \xi_0)^{\frac{n}{d}}} + \ldots\ ;$$

в виду того, что, согласно условию, веществ. часть $A_{n-1}^{(1)} \geqslant$ веществ. части $A_{n-1}^{(j)}$ следует, повторяя те же рассуждения, что или имеет место условие (98) или же $A_{n-1}^{(j)} = A_{n-1}^{(1)}$.

Продолжая таким образом дальше, получаем всегда условие (98) или доходим до $\Theta_j(\xi) = \Theta_1(\xi)$, чего по предположению быть не может.

Таким образом получаем

$$\lim_{\xi=\xi_0} P_1(\xi) = 0$$

или

$$P_1(\xi_0) = 0,$$

$$\sum_g e^{\eta_1^{(g)}(\xi_0)} Q_1^{(g)}(\xi_0) = 0.$$

Итак, нуль функции (90), совпадающий с существенно-особенной точкой, представляет нуль — критическую точку алгебраического типа линейно-показательной функции $\sum_{g} e^{\gamma_1^{(g)}(\xi)} Q_1^{(g)}(\xi)$, и результаты § 16 распространяются и на этот случай.

То же самое относится и к функции

$$A[\lg \alpha(\xi),\ \xi].$$

Если $\xi = \xi_0$ — логарифмическая точка, то

$$A[\lg \alpha(\xi),\ \xi] = \sum_{j=0}^{j=n} P_j(\xi)[\lg(\xi - \xi_0)]^j.$$

Приближая ξ к ξ_0 в форме

$$\sum_{j=0}^{j=n} \frac{P_j(\xi)}{[\lg(\xi - \xi_0)]^{n-j}},$$

которая стремится к 0 с приближением ξ к ξ_0, получаем:

$$P(\xi_0) = 0.$$

§ 18. Трансцендентное число, выражаемое показательным построением первого класса и определяемое рядом трансцендентных уравнений.

Исследование § 14 допускает естественное обобщение.

Можно рассматривать трансцендентное число, определяемое уравнением (78) § 14, приближенно выражаемое корнями ряда уравнений

$$c_0(e^{y_1},\ e^{y_2}\ldots)\omega^m + c_1(e^{y_1},\ e^{y_2}\ldots)\omega^{m-1} + \ldots + c_m(e^{y_1},\ e^{y_2}\ldots) = 0, \qquad (98)$$

где y_j — алгебраические числа, c_j — полиномы с целыми рациональными коэффициентами[1]), которые можно предполагать (не нарушая общности исследования) вида

$$c_j = \sum_{k=1}^{k=q} \delta_j^{(k)} e^{y_k}$$

где $\delta_j^{(k)}$ — целые числа.

При этом при переходе от одного уравнения к другому $\delta_j^{(k)}$ возрастают, но так что

$$\frac{|\delta_j^{(k)}|}{|\delta_0^{(k)}|} < E,$$

где E не зависит от δ.

Дальнейший ход рассуждений мы только *намечаем*.

Теперь в правой части равенства (79) стоит

$$\Theta(e^{x_1},\ e^{x_2}\ldots e^{y_1},\ e^{y_2}\ldots),$$

которое будет степени n относительно c_j и степени m относительно f_j; именно — формы

$$\sum c_0^{\alpha_0} c_1^{\alpha_1}\ldots c_m^{\alpha_m} f_0^{\beta_0} f_1^{\beta_1}\ldots f_n^{\beta_n}$$
$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = n$$
$$\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_n = m.$$

---

1) Не имеющими общего делителя.

Дальше путь такой:
полагают

$$f_j = \Sigma \gamma_j^{(k)} e^{x_k},$$

$\gamma_j^{(k)}$ — целые рациональные числа.

Отмечают, что получается результат *не меньший, чем сумма σ модулей коэффициентов* $\Theta(e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots e^{y_1}, e^{y_2}, \ldots)$, заменяя e^{x_k}, e^{y_k} *единицами,* а $\delta_j^{(k)}$, $\gamma_j^{(k)}$ — их *модулями,* так как коэффициенты получаются сложением и умножением $\delta_j^{(k)}$, $\gamma_j^{(k)}$, а модуль произведения равен произведению модулей, а модуль суммы меньше суммы модулей.

Мы, таким образом, получаем:

$$\sigma < \Sigma \prod_g \Big(\sum_k |\delta_g^{(k)}|\Big)^{\alpha_g} \prod_n \Big(\sum_k |\gamma_g^{(k)}|\Big)^{\beta_n}$$

$$\sigma < \Sigma\, \bar{c}_0^{\alpha_0} \bar{c}_1^{\alpha_1} \ldots \bar{c}_m^{\alpha_m} \bar{f}_0^{\beta_0} \bar{f}_1^{\beta_1} \ldots \bar{f}_n^{\beta_n},$$

если ввести обозначения

$$\bar{c}_j = \sum_k |\delta_j^{(k)}|, \quad \bar{f}_j = \sum_k |\gamma_j^{(k)}|.$$

Отсюда рассуждениями § 14 получаем:

$$\sigma < \bar{\Theta}\Big[\sum_k \sum_j \delta_j^{(k)}\Big]^{\chi} \qquad \chi = \sum_g \alpha_g = n$$

и наконец

$$|\xi - \omega| > \frac{1}{\vartheta^r!},$$

если положить

$$\vartheta = \sum_k \sum_j |\delta_j^{(k)}|.$$

Укажем одно характерное свойство линейно-показательной формы, отсюда вытекающее.

Взяв $m = 1$, т. е.

$$\omega = \sum_{k=1}^{k=q} \frac{\delta^{(k)}}{\sigma} e^{x_k}, \qquad \frac{\delta^{(k)}}{\sigma} < E,$$

мы берем число

$$\xi = \sum_{k=1}^{k=q} \tau^{(k)} e^{x_k}, \text{—}$$

(x_k — алгебраические числа), где $\tau^{(k)}$ — трансцендентные числа и приэтом такие, что

$$|\tau^{(k)} - \delta^{(k)}| < \frac{1}{\sigma^r!}$$

при достаточно большом σ.

Тогда и

$$|\xi - \omega| < \frac{x}{\sigma^r!},$$

где x — наибольший из модулей e^{x_k}

или

$$|\xi - \omega| < \frac{1}{\sigma^{\omega}!}$$

Отсюда — заключение о невыражаемости числа

$$\sum_{k=1}^{k=q} \tau^{(k)} e^{x_k}$$

с помощью показательного построения первого класса.

§ 19. План дальнейшей работы[1]).

1) Изыскание условия, чтобы *алгеброид*

$$\sum_{j=0}^{j=\infty} a_j x^{\frac{j}{d}} = 0,$$

удовлетворяющий алгебраическому дифференциальному уравнению представлял *алгебраическое число.*

2) . . . . . ., чтобы нуль функции, выражаемой алгеброидальным разложением, выражался показательным построением первого класса.

3) То же в предположении выражаемости в конечном виде с помощью элементарных трансцендентных, определимости алгебраическим дифференциальным уравнением.

4) Такие же исследования для алгебраической функции от логарифма алгебраического числа.

5) Исследование выражаемости числа алгебраической функцией от логарифма при приближенном его определении уравнениями типа (98).

6) Определение нисшей границы для формы

$$a \lg \xi + b \lg \eta + c$$

в зависимости от целых (или вообще алгебраических) чисел a, b, c и возможные обобщения этого исследования.

Quelques propriétés des nombres transcendants de la première classe

par **M. D. D. Mordoukhaў-Boltovskoў** (Rostov sur Don).

(*Résumé.*)

Le nombre dont les valeurs approchées sont des fractions rationnelles $\frac{p}{q}$, ne s'exprime pas par une fonction algébrique de e^{x_1}, $e^{x_2}, \ldots \ldots e^{x_n}$, x_j étant des nombres algébriques, si pour toute valeur de r on peut assigner q tel que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^r!} \tag{1}$$

[1]) Это вовсе не план следующих статей, а план для работы лиц, заинтересовавшихся настоящей темой, преимущественно — молодых математиков.

Ce résultat se généralise, en supposant que les valeurs approchées sont des racines d'une série des équations algébriques

$$b_0^{(j)}y^n + b_1^{(j)}y^{n-1} + \ldots + b_n^{(j)} = 0 \tag{2}$$

où

$$\sigma = \sum_{k=1}^{k=\infty} |b_k^{(j)}| \tag{3}$$

croît avec j et $\left|\frac{b_k^{(j)}}{b_0^{(j)}}\right| < E$, où E est indépendant de j.

A la place de (1) on doit mettre

$$|\xi - y^{(j)}| < \frac{1}{\sigma^{c}!}. \tag{4}$$

Le nombre ne s'exprime pas par une fonction algébrique du logarithme d'un nombre algébrique, si on a dans le même sens l'inégalité (1) et ce resultat se généralise aussi, quand on remplace $\frac{p}{q}$ par des racines des équations algébriques (2).

L'inégalité (4) est en même temps la condition suffisante pour que ξ ne soit défini par aucune équation transcendante de la forme

$$A[e^{\alpha_1(\xi)},\ e^{\alpha_2(\xi)}, \ldots e^{x_1},\ e^{x_2}, \ldots \xi] = 0$$

A, $\alpha_1(\xi)$, $\alpha_2(\xi), \ldots$ étant des fonctions algébriques, x_1, $x_2, \ldots x_n$ — des nombres algébriques.

(Rec. Math.; XXXIV: 1, 1927).

Ответственный редактор **Д. Ф. Егоров.**

Главлит № 90791. Гиз № 22507. Тираж 800 экз.

Типография Госиздата „Красный пролетарий". Москва, Пименовская, 16.